DS n°1
Suites et demonstration par recurrence
CORRECTION

Exercice 1

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 8 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 4 - 8 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 4 \end{aligned}$$

or $v_n = u_n - 8$ donc $u_n = v_n + 8$.

d'où :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{2}(v_n + 8) - 4 \\ &= \frac{1}{2}v_n + 4 - 4 \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = 3 - 8 = -5$

(2) (v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -5$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{v_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(3) Comme on l'a vu dans la réponse 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 8$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8}$$

④ On a $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
et par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 8}$$

Exercice 2

<u>Hérédité</u>

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1 + \frac{2}{n+2}$
On a donc :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$$

$$= \frac{3\left(1+\frac{2}{n+2}\right) - 1}{1+\frac{2}{n+2} + 1}$$

$$= \frac{2 + \frac{6}{n+2}}{2 + \frac{2}{n+2}}$$

$$= \frac{\frac{2n+4+6}{n+2}}{\frac{2n+4+2}{n+2}}$$

$$= \frac{2n+10}{2n+6}$$

$$= \frac{n+5}{n+3}$$

$$= \frac{n+3+2}{n+3}$$

$$= 1 + \frac{2}{n+3}$$

d'où l'hérédité.

Initialisation

On a $u_0 = 2$ et $1 + \frac{2}{0+2} = 1 + 1 = 2$

donc

$$u_0 = 1 + \frac{2}{0+2}$$

la proposition est donc vraie pour $n = 0$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = 1 + \frac{2}{n+2}$