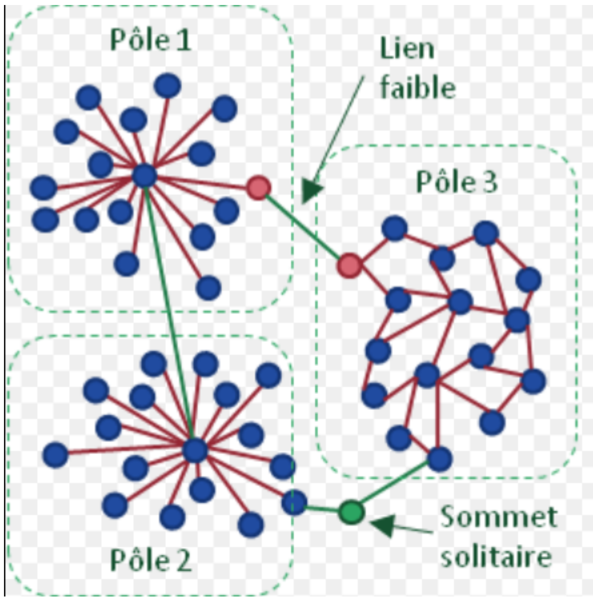
Graphes et algorithmes de graphes

EXERCICES



Exercice 1

Montrer que tout graphe simple à un nombre pair de sommets de degré impair.

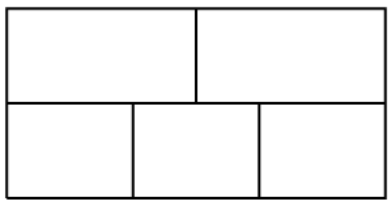
Exercice 2

Un programme prend en entrée une liste (x_1, x_2, x_3) de trois valeurs $x_i \in \{0, 1\}$, et renvoie en sortie une nouvelle liste $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$ avec la convention que $1 + 1 = 0$ (calcul modulo 2). Par exemple, $(0, 0, 1)$ renvoie $(0, 1, 1)$. Représenter l'action du programme par un graphe, afin de répondre aux questions suivantes.

1. En partant d'une liste choisie aléatoirement, quelle est la probabilité d'obtenir le résultat $(1, 1, 0)$? Et le résultat $(0, 1, 0)$?
2. On part de $(0, 0, 1)$ et on fait tourner le programme en boucle un million de fois. Quel résultat obtient-on ?
3. On a fait tourner le programme un million de fois, et le résultat est $(1, 1, 0)$. De quelle suite est-on parti ?

Exercice 3

Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante une et une seule fois ?



Exercice 4

Montrer qu'un graphe simple non orienté ayant au moins deux sommets contient deux sommets de même degré.

Exercice 5

Montrer que dans un arbre (non réduit à un seul sommet), il existe toujours des sommets de degré 1.

Exercice 6

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe connexe non orienté.
Montrer que entre deux sommets quelconques du graphe, il existe une unique chaîne simple si et seulement si la suppression de n'importe quelle arête de $\mathcal{A}$ rend le graphe non connexe.

Exercice 7

Montrer que dans un graphe, si la moyenne des degrés des sommets est supérieure ou égale à 2, alors il existe au moins un cycle.

Exercice 8

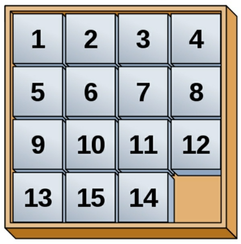
Soit G un arbre à n sommets et m arêtes avec $n \geqslant 2$.

1. Dessiner un exemple d'arbre avec $n = 6$ sommets.
2. Rappeler la relation qui existe entre n et m.
3. On suppose de plus que tous les sommets de G sont de degré inférieur ou égal à trois. Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on note alors n_k le nombre de sommets de degré k. En utilisant la réponse à la question précédente ainsi qu'une autre relation vue en cours, démontrer que $n_1 = n_3 + 2$.

Exercice 9

[Un problème à 25 dollars]

Le taquin est un jeu solitaire en forme de damier créé vers 1870 aux États-Unis. Il est composé de 15 petits carreaux numérotés de 1 à 15 qui glissent dans un cadre prévu pour 16. Peut-on remettre dans l'ordre les carreaux à partir de la configuration suivante, ou les numéros 14 et 15 ont été inversés ?



1. Montrer que le graphe du taquin, où chaque sommet représente une configuration possible, et chaque arête représente un mouvement élémentaire (glissage d'un carreau voisin sur la case vide), est biparti.
2. Montrer que le graphe des permutations, où chaque sommet représente une configuration possible, et chaque arête représente un échange entre deux cases quelconques, est lui aussi biparti.
3. Conclure.

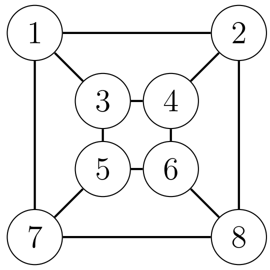
Exercice 10

Montrer que dans un groupe formé de 6 personnes, il y a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas. (On suppose que si A connaît B, alors B connaît également A)
Montrer que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de 5 personnes.

Exercice 11

Exercice 12

Montrer que le graphe suivant est biparti.



Exercice 13

Soit G un graphe d'ordre 7 dont la matrice d'adjacence M est donnée ci-contre.
Ce graphe représente les 7 banc d'un parc relié entre eux par des allées permettant de passer de l'un à l'autre.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

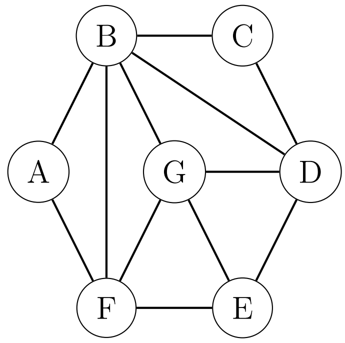
1. On veut peindre les bancs de manière que deux banc reliés par une allée soient de couleurs différentes. Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires.
2. Est-il possible de parcourir toutes les allées sans passer deux fois par la même allée ?
3. Est-il possible possible de parcourir toutes les allée en passant à coté de chaque banc une et une seule fois ?

Exercice 14

Un lycée doit organiser un examen composé de 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numéroté de 1 à 7, sachant que les paires de cours suivantes ont des étudiants en communs : $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{1;7\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{2;7\}$, $\{3;4\}$, $\{3;6\}$, $\{3;7\}$, $\{4;5\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$, $\{5;7\}$ et $\{6;7\}$.
Comment organiser ces épreuves sur une durée minimale ?

Exercice 15

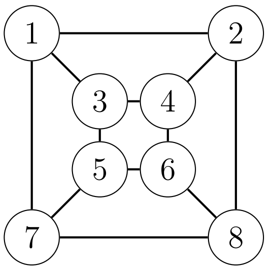
Appliquer l'algorithme DSATUR au graphe suivant.
Le nombre de couleur donné par l'algorithme DSATUR correspond-t-il au nombre chromatique du graphe ?



L'Algorithme DSATUR donne la coloration suivante :

Exercice 16

Montrer que le graphe suivant est biparti.



Exercice 17

On veut transporter des produits chimiques noté A, B, C, D, E, F, G et H par le train. Le tableau ci-dessous indique donne les incompatibilités des produits (mélange explosif ...). En cas d'incompatibilité, les produit ne peuvent pas être entreposé dans le même wagon.

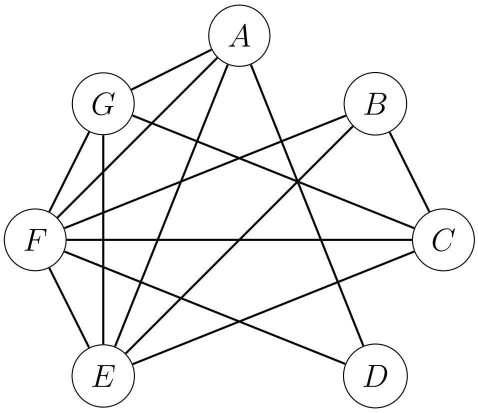
	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Quel est le nombre minimal de wagon nécessaire pour transporter ces produits ?

Exercice 18

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe G ci-dessous indiquent quels

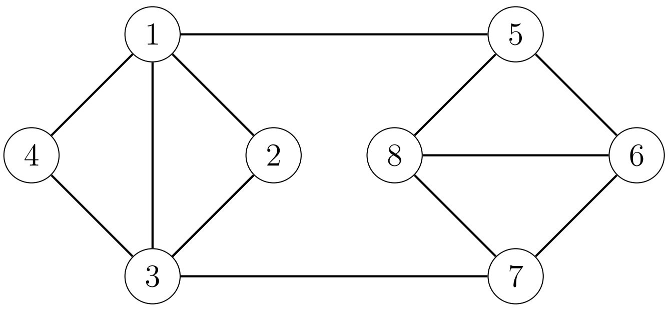
sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1. Déterminer la matrice associée au graphe G (les sommets de G étant classés dans l'ordre alphabétique).
2. Quelle est la nature du sous-graphe de G constitué des sommets A, E, F et G ? Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique c(G) du graphe G ?
3. Quel est le sommet de plus haut degré de G ? En déduire un encadrement de c(G) .
4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de G par ordre de degré décroissant, colorier le graphe G.
5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

Exercice 19

Soit le graphe G représenté ci-dessous :



1. Donner un encadrement du nombre chromatique $\chi(G)$
2. Appliquer l'algorithme DSATUR pour colorer le graphe G.
3. Colorier le graphe avec seulement 3 couleurs.

L'algorithme DSATUR est un algorithme étant classé parmi les heuristiques il ne fournit pas forcement une solution optimale. DSATUR produit donc en temps polynomial une solution réalisable. Son auteur a montré qu'il était capable de fournir en un temps court (relativement aux autres heuristiques et aux méthodes exactes) une coloration optimale dans plus de 90 % des cas.

Exercice 20

Pendant une soirée au château de Moulinsart, au cours de laquelle plusieurs visiteurs se sont succédés à différents horaires, Bianca Castafiore s'est fait voler un précieux coffre à bijoux... Le voleur a subtilisé discrètement la clef de la chambre de la Castafiore (qui se trouvait dans une poche de son manteau posé au salon), il s'est absenté pour commettre le délit et il est revenu dans le salon pour remettre la clef à sa place. Tintin, qui tente de faire la lumière sur cette affaire, contacte le lendemain tous les invités, et tous lui affirment ne jamais avoir quitté le salon pendant la durée de leur visite. Il leur demande enfin qui ils avaient rencontré au salon, et note leurs réponses :

- Tournesol a vu Dupond, Dupont, Irma et Lampion,
- Dupond a vu Tournesol, Dupont, Haddock, Irma et Nestor,
- Dupont a vu Tournesol, Dupond et Haddock,
- Haddock a vu Dupond, Dupont et Irma,
- Irma a vu Tournesol, Dupond, Haddock et Nestor,
- Lampion a vu Tournesol et Nestor,
- Nestor a vu Dupond, Irma et Lampion.

Muni de ces informations, Tintin pourra-t-il démasquer le coupable ?

1. Quel algorithme peut-on utiliser pour savoir s'il y a un menteur dans le groupe.
2. Déterminer le coupable.

Exercice 21

Cet exercice est inspiré de la nouvelle de Claude Berge Qui a tué le Duc de Densmore (Bibliothèque Oulipienne , Réédition Castor Astral, 2000). Dans cette nouvelle policière, le lecteur peut découvrir le meurtrier grâce à un théorème combinatoire dû au mathématicien hongrois . Hajós.

Un jour, Sherlock Holmes recoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans.

A l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Holmes : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

Watson : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.

Holmes : Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?

Watson : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :

- ◦ Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.
- ◦ Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.
- ◦ Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.
- ◦ Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.
- ◦ Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.
- ◦ Georgia a rencontré Ann et Helen.
- ◦ Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.

Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes !
C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :
- Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine l'assassin. Qui est l'assassin ?

1. Quel algorithme peut-on utiliser pour savoir s'il y a un menteur dans le groupe.
2. Déterminer l'assassin.

Exercice 22

L'institut Pasteur possède des milliers de candidats vaccins en cours d'expérimentation, qui doivent tous être conservés dans différents intervalles de températures très basses $[v_i^{min}, v_i^{max}]$ (où i est le numéro du vaccin). Chaque congélateur dont dispose l'institut doit être réglé à une température T_k bien précise (où k est le numéro du congélateur), et pour économiser l'énergie, on cherche à conserver tous les vaccins en faisant fonctionner le moins de congélateurs possibles. Modéliser le problème, et proposer un algorithme pour planifier la conservation.

Exercice 23

On dispose de 7 euros stockés sous la forme de 3 types de jetons, de valeur 1, 2 et 5 euros. On a donc six configurations possibles

$$A = (1)(1)(1)(1)(1)(1)(1), \quad B = (2)(1)(1)(1)(1)(1), \quad etc...$$

Une machine permet de faire trois types d'échanges, dans les deux sens, symbolisés par les doubles flèches :

$$(1)(1) \leftrightarrow (2) \quad ; \quad (1)(1)(1)(1)(1) \leftrightarrow (5) \quad ; \quad (2)(2)(1) \leftrightarrow (5)$$

1. Compléter les six configurations ($C = ..., D = ..., E = ..., F = ...$) et dessiner le graphe de sommets A, B, C, D, E, F représentant toutes les transitions possibles (par un échange avec la machine).
2. Montrer que ce graphe est biparti.
3. En partant de la configuration A, est-il possible de revenir à A après 999 échanges ?
4. (BONUS) Même question en considérant que l'on dispose de N euros, avec $N \geq 5$.

Exercice 24

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueurs doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Quel type de graphe obtenez vous ?

3. Proposez un calendrier des matches.

Exercice 25

Exprimer la résolution d'un Sudoku classique en terme de coloration de graphe. Décrivez le graphe (nombre de sommet, nombres d'arêtes, ...)
Combien faut-il de couleurs ?

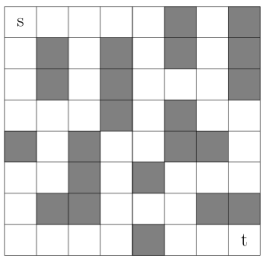
Exercice 26

Soit G un réseau (graphe orienté valué) dont certains arcs ont un coût négatif, mais sans circuit négatif.

1. Illustrer grâce à un exemple le fait que l'algorithme de Dijkstra ne détecte pas toujours les plus courts chemins dans G.
2. Pour contourner le problème induit par les arcs négatifs, un étudiant propose l'idée suivante : « soit $-c \in \mathbb{R}$ le coût minimal dans G. Alors on rajoute $+c$ à tous les coûts : plus précisément, pour chaque arc (i, j), on pose $c(i, j) \leftarrow c(i, j) + c$. Ainsi tous les coûts sont maintenant positifs, et on peut appliquer Dijkstra pour calculer les plus courts chemins. » L'idée fonctionne-t-elle ? Si oui, le prouver. Si non, expliquer avec un exemple.

Exercice 27

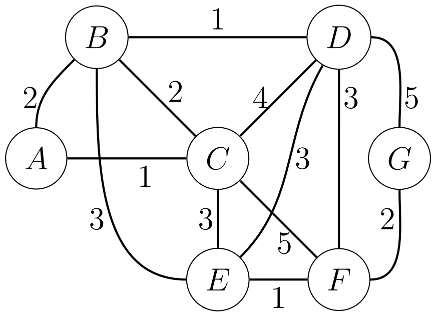
Les cases grisées de l'échiquier de la figure ci-dessous sont interdites. Le but du problème est de déplacer une tour de la case s à la case t sans passer sur les cases interdites (Rappel : une tour ne peut se déplacer qu ?horizontalement et verticalement, mais d ?un nombre de cases libre).
L ?objectif est de trouver un chemin qui minimise le nombre de cases visitées (on entend par cases visitées les cases sur lesquelles se pose la tour dans son déplacement se s à t).



1. Formuler ce problème comme un problème de plus courts chemins (expliquer votre méthode pour construire le graphe correspondant).
2. En déduire un chemin de longueur minimale en nombre de déplacements que doit suivre la tour pour atteindre la case t à partir de la case s.

Exercice 28

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville.
Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques.
Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Partie I

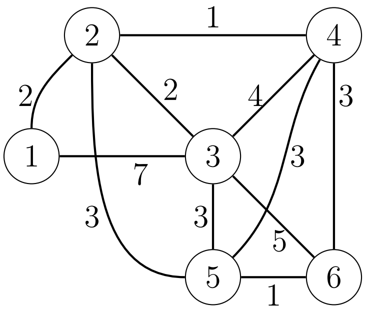
1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :
   (a) Ce graphe est-il connexe ?
   (b) Ce graphe est-il complet ?
   (c) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
   (d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?
2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

Partie II

1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour donner les plus courtes distances du sommet A aux autres sommets.
2. En déduire le chemin le plus court du sommet A au sommet G.

Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G. La réponse sera justifiée par un algorithme.

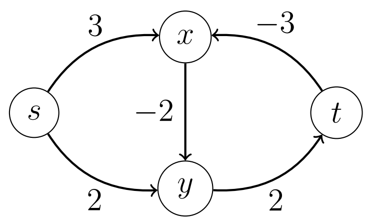
Exercice 29



1. Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall au graphe précédent.
2. Déterminer le sommet au "centre" du graphe, c'est à dire le sommet s minimisant la somme des distances de s aux autres sommets.

Exercice 30

Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford sur le réseau ci-dessous, à partir du sommet s. Vérifier que l'algorithme détecte la présence d'un circuit absorbant.



Exercice 31

[algorithme de Sedgewick-Vitter]
Nous avons vu en cours que pour calculer le plus court chemin entre deux sommets fixés s et t, il n'existait pas d'algorithme plus efficace que Dijkstra, qui calcule tous les plus courts chemins d'origine s. Ceci est vrai dans le cas général, mais il existe cependant des cas particuliers où l'on peut améliorer la recherche d'un plus court chemin à destination fixée... Un *graphe euclidien* est un graphe non orienté dont les sommets sont des points d'un espace euclidien, et le coûts de chaque arête est égale à la longueur de l'arête :

$$c(x, y) := \|y - x\|.$$

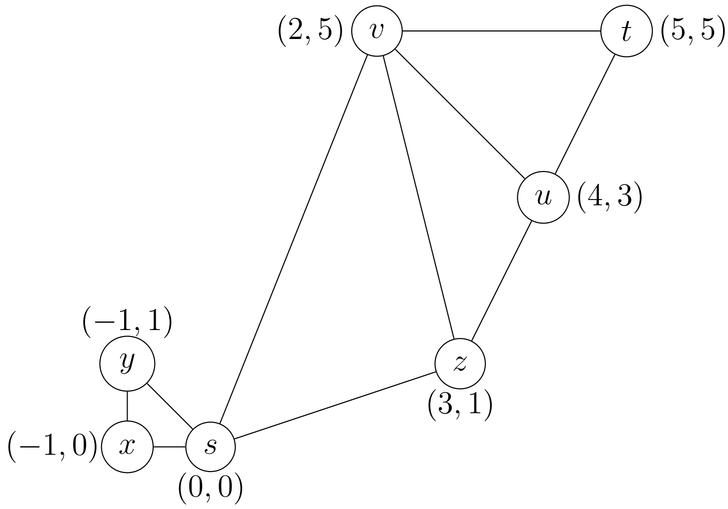
On rappelle que l'algorithme de Dijkstra visite les sommets x dans l'ordre croissant de $d(x)$. L'algorithme de Sedgewick-Vitter est une variante qui permet de calculer plus rapidement le plus court chemin vers un sommet t fixé. Pour cela, on visite les sommets x dans l'ordre croissant de $d(x) + \|t - x\|$. Plus précisément, on remplace la ligne

"trouver un sommet x de L tel que $d(x)$ soit minimal"

dans l'algorithme de Dijkstra par :

"trouver un sommet x de L tel que $d(x) + \|t - x\|$ soit minimal".

Montrer la correction de l'algorithme : à chaque étape, le sommet x selectionné est tel que $d(x)$ soit optimale. Puis, comparer les algorithmes de Dijkstra et de Sedgewick-Vitter pour le calcul du plus court chemin de s à t dans le graphe du plan euclidien ci-après. (On a indiqué les coordonnées des sommets dans un repère orthonormé.)



Exercice 32

On considère un réseau de télécommunication, composé d'émetteurs-récepteurs pouvant s'envoyer des messages, avec une certaine fiabilité.
On modélise ce réseau à l'aide d'un graphe orienté et valué, où chaque sommet représente un émetteur-récepteur, chaque arc (x, y) indique la possibilité d'une transmission de x à y, et la valuation $p(x, y)$ indique la probabilité pour que la communication se passe sans problème de x à y.

1. Comment calculer la *fiabilité* d'un chemin $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire la probabilité qu'un message soit bien transmis de x_1 à x_n par l'intermédiaire de ce chemin ?
2. Montrer que la recherche d'un chemin de fiabilité maximale entre deux sommets peut se rapporter à un problème de plus court chemin (indice : utiliser une fonction qui transforme les produits en sommes).

Exercice 33

[chemin de capacité maximale]
On représente un réseau routier par un graphe orienté valué, dont la valuation de chaque arc $c(x, y)$ représente la *capacité de trafic* sur la route de x à y. On définit alors la capacité de trafic sur un chemin comme le minimum des capacités des arcs qui composent le chemin. Modifier l'algorithme de Dijkstra pour obtenir un algorithme qui calcule la capacité maximale des chemins d'origine s dans un réseau. Montrer la correction de ce nouvel algorithme.

Exercice 34

On considère un système de contraintes :

$$x_j - x_i \leq w_{ij}, \quad x_i \leq w_i \quad (i, j = 1, ...n). \tag{1}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 - x_2 & \leq & 3, & \qquad & x_1 & \leq & 3, \\ x_2 - x_3 & \leq & -2, & & x_2 & \leq & 2, \\ x_3 - x_1 & \leq & 2. & & x_3 & \leq & 1. \end{array} \tag{2}$$

On associe à ce système un *graphe de contrainte*, ayant un sommet pour chaque variable x_i et un arc (x_i, x_j) de coût w_{ij} pour chaque contrainte $x_j - x_i \leq w_{ij}$. On ajoute à ce graphe un sommet source s, relié à chaque autre sommet par un arc (s, x_i) de coût w_i.

1. Dessiner le graphe de contrainte correspondant au système 2 donné en exemple.
2. Résoudre le système 2 grâce à l'algorithme de Bellman-Ford.
3. Montrer qu'en toute généralité, le système de contraintes 1 admet des solutions si et seulement si le graphe de contrainte associé ne possède pas de circuit négatif.

Exercice 35

Dans un réseau (graphe orienté valué), on note $d(i, j)$ le coût d'un plus court chemin allant du sommet i au sommet j, et on pose $d(i, j) = +\infty$ s'il n'existe pas de chemin de i à j.

1. Est-il possible qu'il existe un chemin de i à j, mais pas de plus court chemin ? Justifier.
2. Étant donné trois sommets i, j, k, quelle inégalité relie $d(i, j)$, $d(i, k)$ et $d(k, j)$?
3. En cours d'exécution de l'algorithme de Floyd-Warshall sur un réseau à quatre sommets,

on obtient la matrice

$$D = (d(i,j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 & 1 & 7 \\ +\infty & 0 & 3 & -1 & 1 \\ +\infty & +\infty & 0 & 2 & 4 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 & 4 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme est-il terminé, ou peut-on encore améliorer certaines entrées de la matrice ? Justifier.

Exercice 36

Répondre par `vrai` ou `faux` aux quatre affirmations suivantes. Justifier la réponse par une courte preuve (si `vrai`) ou un contre-exemple (si `faux`). On se place dans un graphe orienté valué...

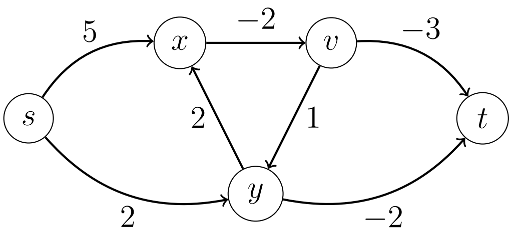
1. S'il existe un plus court chemin entre deux sommets s et t, alors celui-ci est unique.
2. S'il existe un plus court chemin entre deux sommets s et t, alors il est élémentaire (il ne passe pas deux fois par le même sommet).

Pour les deux questions suivantes, on suppose que α est un chemin de s_0 à s_1, et β est un chemin de s_1 à s_2. On note $\alpha\beta$ le chemin de s_0 à s_2 obtenu en parcourant le chemin α suivi du chemin β.

3. Si α et β sont des plus courts chemins, alors $\alpha\beta$ est un plus court chemin.
4. Si $\alpha\beta$ est un plus court chemin, alors α et β sont des plus courts chemins.

Exercice 37

On considère le graphe orienté valué G ci-dessous.



1. Quel algorithme utiliseriez-vous pour trouver un plus court chemin de s à t ? Pourquoi ?
2. Décrire succinctement le principe de cet algorithme.
3. Exécuter l'algorithme et en déduire un plus court chemin de s à t.
4. D'après l'exécution de l'algorithme, qu'est-ce qui nous assure qu'il n'existe pas de circuit négatif dans le graphe G ? (autrement dit, que se passerait-il s'il existait un circuit négatif ?)

Exercice 38

On a 6 tâches A,B,C,D,E,F à réaliser. Pour être traitées, les tâches D,E,F nécessitent toutes les trois que A,B,C soient préalablement effectuées.

1. Tracer le graphe potentiels-tâches et le graphe potentiels-étapes (méthode PERT) du

projet.

2. Lequel de ces graphes donne, selon vous, la représentation la plus visuellement lisible de l'enchaînement des tâches ?
3. On se rend compte, en cours de préparation du projet, que finalement la tâche D n'a pas besoin de l'antériorité de A pour pouvoir être traitée. Comment modifier les deux graphes ? Lequel est le plus flexible (i.e. peut être modifié le plus facilement) ?

Exercice 39

On décompose un projet en différentes tâches A,B,...,N. On donne les contraintes de précédence ainsi que la durée de chaque tâche dans le tableau ci-dessous.

tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	F	6
B	-	9
C	B,G,I,N	7
D	E,F,J	5
E	K	6
F	-	7
G	J,K	2
H	K	5
I	A,L	3
J	B,H,M	4
K	-	3
L	F	8
M	F	3
N	A,L	4

1. Classer les tâches par niveaux et déterminer les tâches immédiatement antérieures.
2. Tracer le graphe potentiels-tâches du projet.
3. Calculer la date de début au plus tôt de chaque tâche, et la durée minimale du projet.
4. Calculer la date de début au plus tard et la marge de chaque tâche.
5. Déterminer le chemin critique.
6. Dans les 3 cas suivants, indiquer ce que devient la durée minimale du projet :
   - la durée de C passe à 11 jours ;
   - la durée de E passe à 11 jours ;
   - la durée de I passe à 11 jours.

Exercice 40

On décompose un projet en différentes tâches A,B,...,L. On donne les contraintes de précédence ainsi que la durée de chaque tâche dans le tableau ci-dessous.

tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	B	4
B	-	8
C	-	11
D	B	5
E	C	3
F	-	2
G	E,K	5
H	A,B,C	2
I	C,D,H,L	10
J	B,C,L	5
K	F	10
L	A,C	3

1. Classer les tâches par niveaux et déterminer les tâches immédiatement antérieures.
2. Tracer le graphe potentiels-tâches du projet.
3. Calculer la date de début au plus tôt de chaque tâche, et la durée minimale du projet.
4. Calculer la date de début au plus tard et la marge de chaque tâche.
5. Déterminer le chemin critique.
6. Dans les 3 cas suivants, indiquer ce que devient la durée minimale du projet :
   - la durée de E passe à 10 jours ;
   - la durée de L passe à 5 jours ;
   - la durée de G passe à 10 jours.

Exercice 41

Appliquer la méthode PERT au projet suivant.

tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	-	3
B	-	9
C	-	5
D	A	8
E	B	4
F	B	7
G	B	20
H	C,F	6
I	D,E	5

Exercice 42

On décompose un projet en différentes tâches A,B,C,D,E,F,G. On donne les contraintes de précédence ainsi que la durée de chaque tâche dans le tableau ci-dessous.

tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	-	3
B	A	2
C	-	4
D	A,E	1
E	A,C	6
F	-	8
G	A,B,C,F	7

1. Tracer le graphe potentiels-tâches du projet. On y fera apparaître le classement des tâches par niveaux.
2. Calculer la date de début au plus tôt de chaque tâche, et la durée minimale du projet.
3. Calculer la date de début au plus tard, et la marge de chaque tâche.
4. Déterminer le chemin critique.
5. Suite à un imprévu, on se voit dans l'obligation de faire un choix entre deux options : (1) rajouter 1 jour à la durée de la tâche E, ou (2) rajouter 5 jours à la durée de la tâche B. Quelle option est préférable ? justifier.

Exercice 43

Un festival de musique a lieu pendant 5 jours consécutifs, avec des concerts à Nantes et à Angers. Le tableau suivant récapitule le nombre de concerts qui ont lieu dans chacune des deux villes en fonction du numéro n de la journée.

jour numéro...	1	2	3	4	5
nombre de concerts à Nantes	1	2	4	2	1
nombre de concerts à Angers	4	2	0	1	4

Marcellin souhaite assister à un maximum de concerts possible. Mais il ne se déplace qu'à vélo : il lui faut donc sacrifier une journée entière pour voyager d'une ville à l'autre. Le jour numéro 0, il a le choix entre pédaler vers Nantes ou vers Angers pour être sur place au début du jour numéro 1. Puis, chaque jour, il peut soit changer de ville (et n'assister à aucun concert), soit assister à tous les concerts dans la ville où il se trouve.

1. Montrer que le problème du choix du planning optimal de Marcellin peut être vu comme un problème de *plus long chemin* d'un sommet "`début`" à un sommet "`fin`", dans un graphe G que l'on dessinera.
2. Dans un graphe potentiel-tâches, comment appelle-t-on le plus long chemin de `début` à `fin` ?
3. En considérant G comme un graphe potentiel-tâches, trouver les dates de début au plus tôt pour chaque sommet, et la durée minimale du projet.
4. Trouver les dates de début au plus tard, et le chemin critique.
5. Conclure sur le planning que devra suivre Marcellin.