Terminales maths expert.

DS 1

Correction.

Exercice 1

1) $z_1 = \dfrac{1}{2-i} = \dfrac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+i}{4+1} = \boxed{\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i}$

2) $z_2 = \dfrac{3-2i}{4i-5} = \dfrac{(3-2i)(-4i-5)}{(4i-5)(-4i-5)} = \dfrac{-15+8i^2-12i+10i}{16+25} = \boxed{\dfrac{-23}{41} - \dfrac{2}{41}i}$

Exercice 2

1) $\overline{Z} = \overline{z^2+(3-i)z+3i} = \bar{z}^2+(3+i)\bar{z}-3i$

2) $\overline{Z} = \overline{\left(\dfrac{2z-5i+7}{3z^2-(2+i)z+4}\right)}$

$$\boxed{= \frac{2\bar{z}+5i+7}{3\bar{z}^2-(2-i)\bar{z}+4}}$$

Exercice 3

1) Soit $z \in \mathbb{C}$

$5z+3i = 2iz-5 \iff 5z-2iz = -5-3i$

$\iff z(5-2i) = -5-3i$

$\iff z = \dfrac{-5-3i}{5-2i}$

or $\dfrac{-5-3i}{5-2i} = \dfrac{(-5-3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}$

$$= \frac{-25-6i^2-15i-10i}{25+4}$$

$$= \frac{-19}{29} - \frac{25}{29}i$$

Donc l'ensemble des solutions de $5z+3i = 2iz-5$ est $\left\{\frac{-19}{29} - \frac{25}{29}i\right\}$

(2) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$.

$$(2+i)z - 3\overline{z} = z+1 \iff (2+i)(a+ib) - 3(a-ib) = a+ib+1$$

$$\iff 2a+2ib+ia-b-3a+3ib = a+1+ib$$

$$\iff -a-b+i(a+5b) = a+1+ib$$

$$\iff \begin{cases} -a-b = a+1 \\ a+5b = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a+b = -1 \\ a+4b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -7b = -1 & L_1 - 2L_2 \to L_1 \\ 7a = -4 & 4L_1 - L_2 \to L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = \frac{1}{7} \\ a = \frac{-4}{7} \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de $(2+i)z - 3\overline{z} = z+1$ est $\left\{-\frac{4}{7} + \frac{1}{7}i\right\}$

③ Soit $z \in \mathbb{C}$

$$2z^2 - 12z + 26 = 0 \iff z^2 - 6z + 13 = 0$$

Soit Δ le discriminant de $z^2 - 6z + 13$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13$$
$$= 36 - 52$$
$$= -16$$

$\Delta < 0$ donc l'equation $z^2 - 6z + 13 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont :

$$z_1 = \frac{-(-6) + i\sqrt{16}}{2} = 3 + 2i$$

$$z_2 = \frac{-(-6) - i\sqrt{16}}{2} = 3 - 2i$$

Par conséquent, l'equation $2z^2 - 12z + 26 = 0$ admet une deux solutions qui sont :
$z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 3 - 2i$

Exercice 4

① Avec $z \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}}$$

② On obtient donc :

$$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}}$$

③ $$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$$

④ On déduit des questions précédentes que :

$$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$$

⑤ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)}$

$= \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$ car $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$= \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}}$ d'après 4)

$$\boxed{= \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$$

Exercice 5

Soit $b \in \mathbb{R}$

$P(ib) = (ib)^3 + (-2+4i)(ib)^2 + (3-8i)(ib) + 12i$

$= -ib^3 + 2b^2 - 4ib^2 + 3ib + 8b + 12i$

$= 2b^2 + 8b + i(-b^3 - 4b^2 + 3b + 12)$

donc $P(ib) = 0 \iff \begin{cases} 2b^2 + 8b = 0 \\ -b^3 - 4b^2 + 3b + 12 = 0 \end{cases}$

or $2b^2 + 8b = 0 \iff 2b(b+4) = 0$

$\iff b = 0$ ou $b = -4$

De plus, $-0^3 - 4 \times 0^2 + 3 \times 0 + 12 \neq 0$

et $-(-4)^3 - 4 \times (-4)^2 + 3 \times (-4) + 12 = 64 - 64 - 12 + 12 = 0$

donc l'unique solution de $P(ib)=0$ sur $\mathbb{R}$ est obtenue pour $b=-4$ et par conséquent, l'unique solution imaginaire pure de l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$ est $\boxed{z=-4i}$