Fonction polynôme et équation du second degré

1 Définition et vocabulaire

Définition

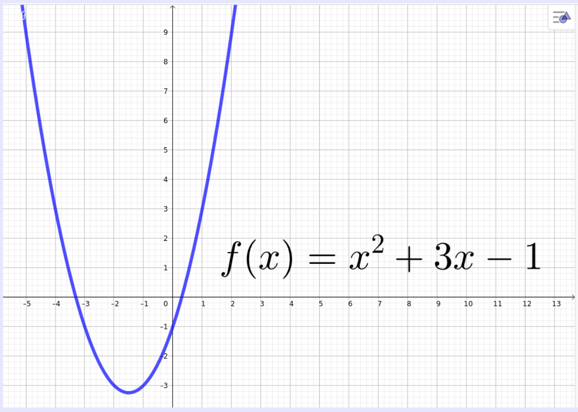
On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction définie dur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.
a, b et c sont appelés coefficients du polynôme $ax^2 + bx + c$.

- a est le coefficient du terme de degré 2
- b est le coefficient du terme de degré 1
- c est le terme constant.

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée une **parabole**.

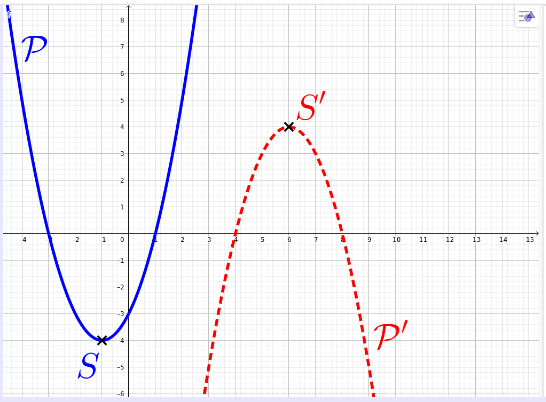


Exemples

- la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x^2 + x - 1$ est une fonction polynôme du second degré.
- la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ est une fonction polynôme du second degré où le coefficient de terme de degré 1 et le terme constant sont égale à 0.
- la fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par $i(x) = x - 1$ **n'est pas** une fonction polynôme du second degré, c'est une fonction affine.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5$ est une fonction polynôme de degré 2.

Définition

On appelle sommet le point "le plus haut" ou le point "le plus bas" de la parabole.
Dans le graphique, S est le sommet de $\mathcal{P}$ et S' est le sommet de $\mathcal{P}'$



Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exemple

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - 3x + 1 = ax^2 + (b-1)x + c$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a &= 2 \\ b-1 &= -3 \\ c &= 1 \end{cases}$$

2 Forme canonique

Définition

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et p la fonction polynôme du second degré définie par :

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

On appelle discriminant de p le réel défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple

Soient f la fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et Δ son discriminant. On a donc $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$, d'où :

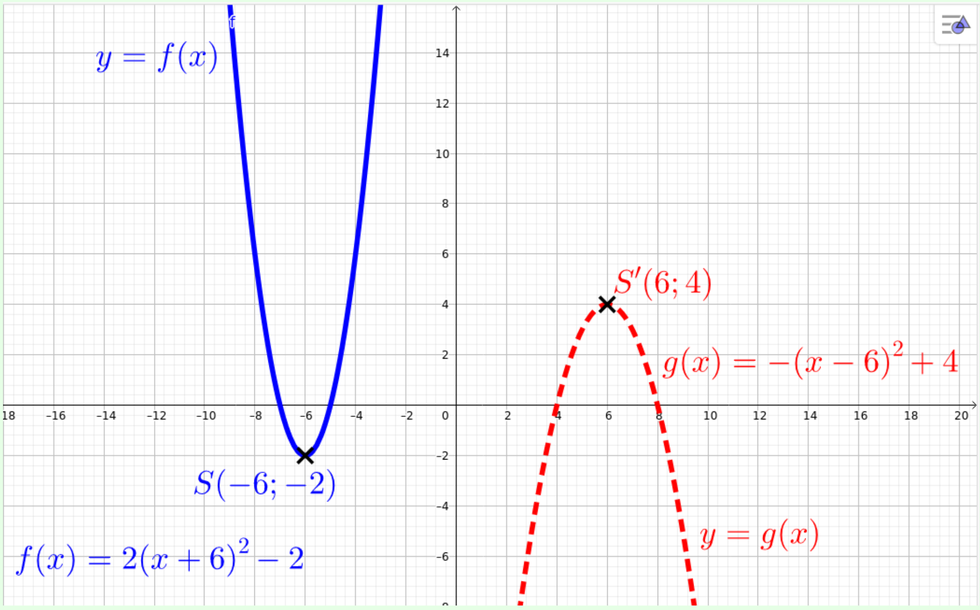
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$$

Propriété

Pour toutes fonctions polynômes du second degré définie par $p(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, il existe deux réels α et β tels que :

$$p(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \dfrac{-\Delta}{4a}$
Cette forme est appelé forme canonique de p et le sommet de la parabole représentant p est $S(\alpha, \beta)$.



Démonstration

Soient a, $b$et c trois réels avec $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right)\\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\right)\right)\\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

$$= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$
$$= a\left(x - \alpha\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Exemples

On peut utiliser deux méthodes différentes pour déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 3x^2 - 24x + 2$.

1. On utilise le calcul en suivant le principe de la démonstration.
   $f(x) = 3x^2 - 24x + 2$
   $= 3(x^2 - 8x) + 2$
   $= 3\left((x-4)^2 - 16\right) + 2$
   $= 3(x-4)^2 - 48 + 2$
   $\boxed{= 3(x-4)^2 - 46}$
2. On peut aussi utiliser les formules de la propriété.
   $3x^2 - 24x + 2 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -24$ et $c = 2$
   On a alors $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-24)}{2 \times 3} = \dfrac{24}{6} = 4$
   et $\beta = f(\alpha) = f(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 2 = 3 \times 16 - 96 + 2 = 48 - 96 + 2 = -46$
   donc $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, c'est à dire $\boxed{f(x) = 3(x-4)^2 - 46}$

3 Equations du second degré et forme factorisée

3 .1 Racine évidente, factorisation et racine

Définition

On appelle racine de la fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ toute solution de l'équation $f(x) = 0$. C'est à dire toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
Tout d'abord, f est une fonction polynôme du second degré.
De plus, on remarque $f(1) = 0$, en effet :

$$f(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$$

1 est donc une racine de f.

3 .2 Méthode générale

Propriété

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, alors il existe deux réels x_1 et x_2 tel que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

avec :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ est appelé **forme factorisée** du polynôme.
Dans ce cas, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux et seulement deux solutions réelles distinctes qui sont x_1 et x_2. On les appelle aussi **racines du polynôme**.

- Si $\Delta = 0$, alors il existe un réels x_0 tel que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2$$

avec :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$a\left(x - x_0\right)^2$ est appelé **forme factorisée** du polynôme.
Dans ce cas, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle qui est x_0. On l'appelle aussi **racine du polynôme**.

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'admet ni racines, ni forme factorisée.

Exemple

- L'objectif de cet exemple est de résoudre l'équation :

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

Dans un premier temps, on remarque qu'il n'y a pas de racines évidentes.
Dans ce cas, on calcul le discriminant de $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -7$ et $c = -4$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 49 + 32 = 81$$

$\Delta > 0$, donc l'équation $2x^2 - 7x - 4 = 0$ a deux solutions distinctes qui sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-7) - \sqrt{81}}{2 \times 2} \\ &= \frac{7 - 9}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-7) + \sqrt{81}}{2 \times 2} \\ &= \frac{7 + 9}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

- L'objectif de cet autre exemple est de déterminer la forme factorisée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$.
C'est la même question que la précédente, mais posée différemment. La encore, après avoir remarqué qu'il n'y a pas de racine évidente, on pourra calculer le discriminant de

f et déterminer les racines qui sont comme précédemment $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 4$.
La forme factorisée de f est donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 2\left(x - \left(\frac{-1}{2}\right)\right)(x-4) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4) \end{aligned}$$

Démonstration

Soient a, $b$et c trois réels avec $a \neq 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Comme on l'a vu dans la démonstration précédente, on a :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- Si $\Delta > 0$, on a $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ et par conséquent : $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right)$

$$\begin{aligned} &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  et par conséquent, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x_1 = 0 \quad \text{ou } x - x_2 = 0 \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = x_1 \quad \text{ou } x = x_2 \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - 0\right) \\ &= a\left(x - x_0\right)^2 \text{ avec :} \end{aligned}$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

  et par conséquent, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(x - x_0\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x_0 = 0 \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = x_0 \end{aligned}$$

- Supposons $\Delta < 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad \text{car } a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

or $\Delta<0$, donc $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ alors que $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0$.

Donc $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est impossible et par conséquent, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. La fonction polynôme f n'a donc pas de forme factorisée.

4 Relation coefficients/racines

Propriété

Soit a, b et c trois réels avec $a\neq 0$ et $p(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme de degré deux ayant deux racines distinctes x_1 et x_2. On a alors :

- $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$
- $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Exemple

- La fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=x^2-3x+1$ admet deux racines, en effet son discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 1=9-8=1$ est positif.
  On sait donc, de par la propriété ci-dessus, que la somme des racines est $\dfrac{3}{1}=3$ et leur produit est $\dfrac{1}{1}=1$. C'est à dire, en notant x_1 et x_2 ces deux racines, on a :
  $$x_1+x_2=3 \quad \text{et} \quad x_1\times x_2=1$$
- La fonction polynôme du second degré définie par $g(x)=-2x^2+7x+6$ admet deux racines, en effet son discriminant $\Delta=7^2-4\times(-2)\times 6=9-8=97$ est positif.
  On sait donc, de par la propriété ci-dessus, que la somme des racines est $\dfrac{-7}{-2}=\dfrac{7}{2}$ et leur produit est $\dfrac{6}{-2}=-3$. C'est à dire, en notant x_1 et x_2 ces deux racines, on a :
  $$x_1+x_2=\frac{7}{2} \quad \text{et} \quad x_1\times x_2=-3$$

Démonstration

Soit a, b et c trois réels avec $a\neq 0$ et $p(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme de degré deux ayant deux racines distinctes x_1 et x_2. On a alors, en utilisant la forme factorisée de p :

$$\begin{aligned}p(x)&=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\\&=a\left(x^2-xx_2-x_1x+x_1x_2\right)\\&=a\left(x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2\right)\\&=ax^2-ax(x_1+x_2)+ax_1x_2\end{aligned}$$

or pour tout réel x, $p(x)=ax^2+bx+c$, donc par identification, on obtient :

$$-a(x_1+x_2)=b \quad \text{et} \quad ax_1x_2=c$$

donc $\boxed{(x_1+x_2) = \dfrac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \dfrac{c}{a}}$

Propriété

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si il sont solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Démonstration

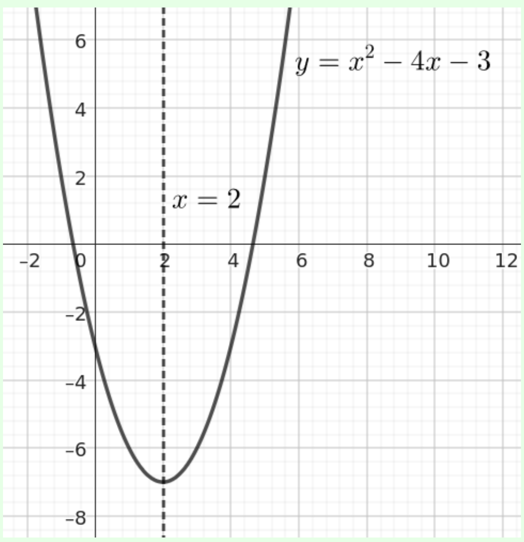
- Si deux réels x_1 et x_2 ont pour somme S et pour produit P, alors $x_2 = S - x_1$.
  de plus $P = x_1x_2 = x_1(S - x_1) = Sx_1 - x_1^2$.
  Donc $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$ et par conséquent x_1 est solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.
  On montre de même que x_2 est aussi une solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.
- Réciproquement, si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, alors, d'après la proposition précédente, ont leur somme qui est égale à S et leur produit égale à P.

5 Représentations graphiques - axe de symétrie

5 .1 Axe de symétrie

Propriété

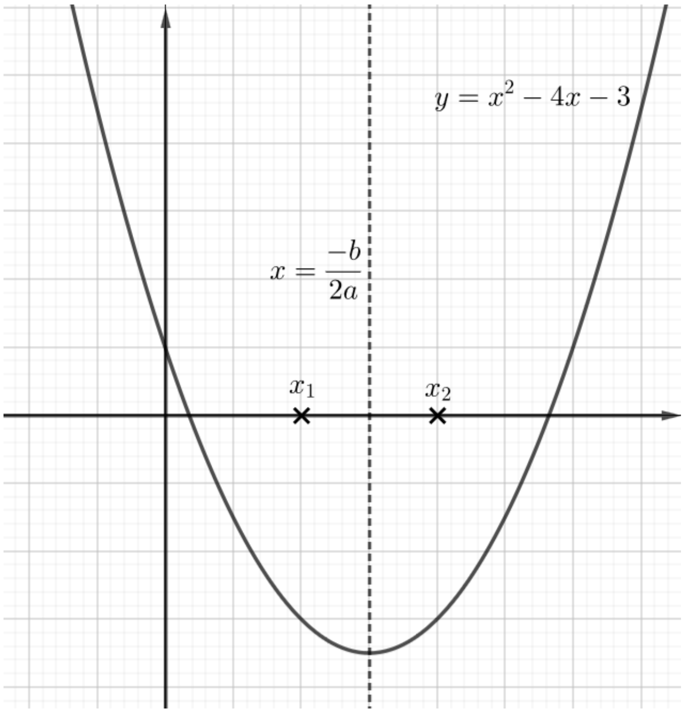
La parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ admet la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ pour axe de symétrie.



Exemple

La parabole représentant la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$, a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{-3}{2 \times 5}$. C'est donc la droite d'équation $x = \dfrac{3}{10}$

Démonstration

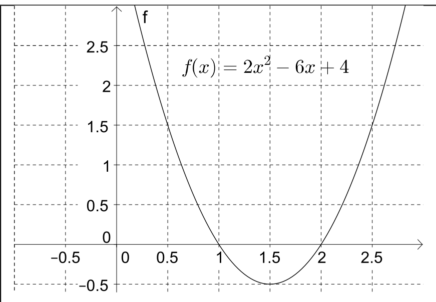
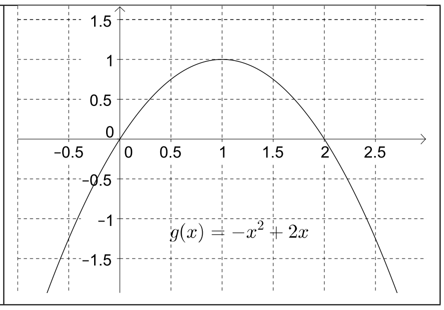
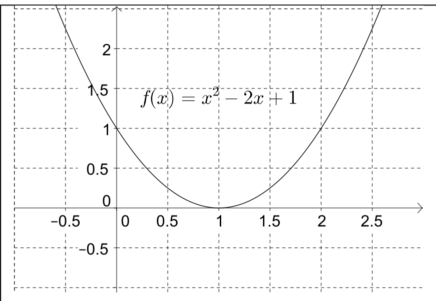
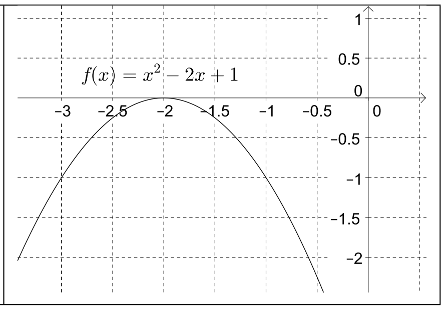


Soit $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On a donc d'après le cours, pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.
D'où $f(x) = a(x - \frac{-b}{2a})^2 + \beta$, ou encore $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \beta$.
Soit x et x' deux réels symétriques par rapport à $\frac{-b}{2a}$, c'est à dire que :
$\frac{x+y}{2} = \frac{-b}{2a}$
donc $x + x' = 2 \times \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{a}$ et par conséquent $\boxed{x' = \frac{-b}{a} - x}$.
Pour montrer que la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{P}$, on doit donc montrer que $f(x') = f(x)$.
En effet :

$$\begin{aligned}
f(x') &= a(x' + \frac{b}{2a})^2 + \beta \\
&= a(\frac{-b}{a} - x + \frac{b}{2a})^2 + \beta \\
&= a(-x - \frac{b}{2a})^2 + \beta \\
&= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \beta \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La droite d'équation } x = \frac{-b}{2a} \text{ est donc un axe de symétrie de } \mathcal{P}}$.

5 .2 interprétations graphiques

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$