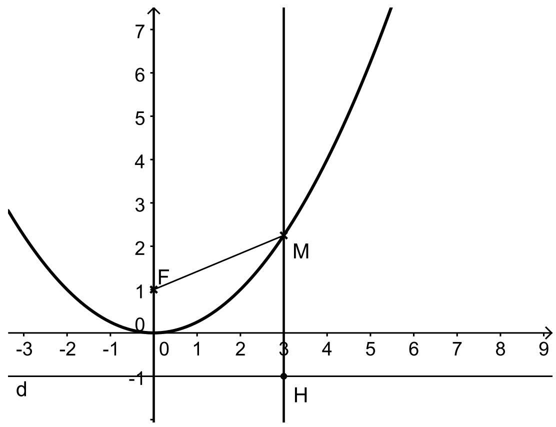
Nombre dérivé et tangente (Niveau 2)

Exercice 1

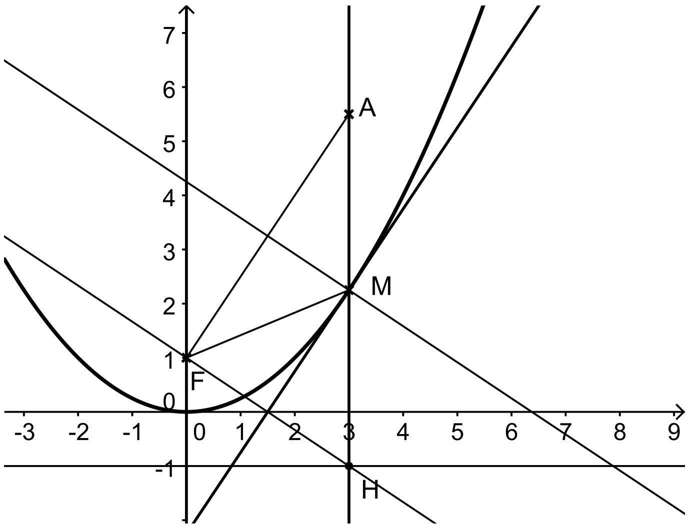
Soit d une droite et F un point n'appartenant pas à d.
On appelle parabole de foyer F et de directrice d l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M du plan tel que $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur d

Soit H' le projeté orthogonal de F sur d et $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé où O est le milieu de $[FH']$, $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur de d et $\overrightarrow{j}$ le vecteur $\overrightarrow{OF}$.



1. Partie A - Equation de $\mathcal{P}$
   (a) Démontrer que l'équation de $\mathcal{P}$ dans $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est :
   $$y = \frac{1}{4}x^2$$
   (b) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a.

2. Partie B - Une propriété intéressante.
   Soit A le point de (MH) tel que M soit le milieu de $[AH]$.
   L'objectif de cette partie est de démontrer que la perpendiculaire à $\mathcal{T}_a$ passant par M est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMA}$.



   (a) Montrer que $\mathcal{T}_a$ est la médiatrice de $[FH]$
   (b) Déterminer une équation de la parallèle Δ à (FH) passant par M.
   (c) Démontrer que le milieu I de $[FA]$ appartient à Δ.
   (d) En déduire que Δ est la bissectrice de $\widehat{FMA}$
   (e) Conclure

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$

De $E = mc^2$ à $E_c = \dfrac{1}{2}m_0v^2$

La formule bien connue $E = mc^2$ est issue de la théorie de la relativité restreinte dans laquelle la masse inerte m d'un corps qui caractérise la résistance d'un corps au mouvement varie en fonction de la vitesse. Dans cette théorie on a :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

où m_0 est la masse inerte d'un corps représentant la quantité de matière contenue dans le corps (elle est constante).

Dans la vie de tout les jours, on peut considérer que la vitesse v est très faible par rapport à la vitesse de la lumière c, donc $\dfrac{v^2}{c^2}$ est proche de 0. Dans cet exercice, on pose $h = \dfrac{v^2}{c^2}$.
On obtient alors :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-h}}$$

Soit f la fonction définie sur $]-1;+1[$ définie par :

$$f(h) = \frac{m_0}{\sqrt{1-h}}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $f'(0)$.
2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0.
3. En déduire une approximation (affine) de $f(h)$ lorsque h est proche de 0.
4. L'énergie cinétique en mécanique est donnée par :

   $$E_c = E - m_0c^2$$

   Donner alors une approximation de l'énergie cinétique lorsque les vitesses de l'objet sont faible par rapport à la vitesse de la lumière.