Suites arithmétiques et géométriques

1 Suites arithmétiques

Définition

Soit $i \in \mathbb{N}$
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_i et de raison $r \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq i$ on a $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.
On a alors :

$$\begin{tikzcd}
u_0=-2 \arrow[r, bend left, "+3"] \arrow[rrrrr, bend right, "+(3\times 5)"'] & u_1=1 \arrow[r, bend left, "+3"] & u_2=4 \arrow[r, bend left, "+3"] & u_3=7 \arrow[r, bend left, "+3"] & u_4=10 \arrow[r, bend left, "+3"] & u_5=13
\end{tikzcd}$$

Propriété

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_i et de raison $r \in \mathbb{R}$.
Dans ce cas, on a pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq i, p \geq i$ on a $\boxed{u_n = u_p + (n-p) \times r}$.
Cas particulier si $p = 0$: $u_n = u_0 + n \times r$.

Exemple

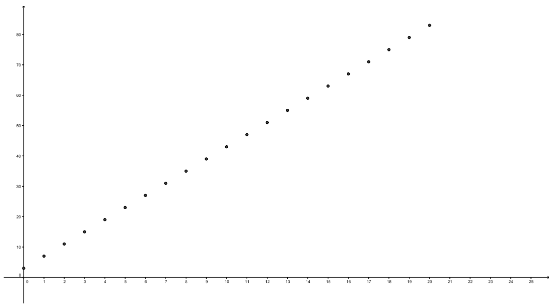
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $r = 2$ et telle que $u_5 = 3$.
Pour calculer u_{12}, on peut utiliser la formule précédente, d'où :

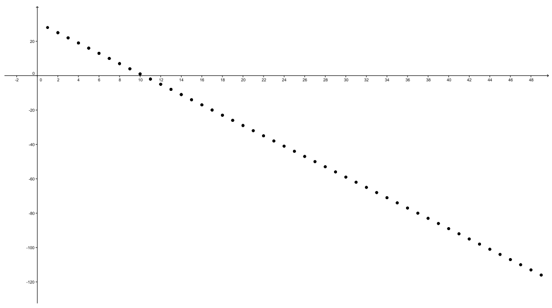
$$\begin{aligned} u_{12} &= u_5 + (12-5) \times 2 \\ &= 3 + 7 \times 2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Propriétés

Variation d'une suite arithmétique

- Une suite arithmétique est strictement croissante si et seulement si sa raison est strictement positive.
- Une suite arithmétique est strictement décroissante si et seulement si sa raison est strictement négative.





démonstration

En effet, soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
On a donc $u_{n+1} = u_n + r$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} u_{n+1} > u_n &\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \\ &\Leftrightarrow u_n + r - u_n > 0 \\ &\Leftrightarrow r > 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.

On démontre de même que (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.

Propriété

Somme des n premiers entiers naturels

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Et pour tout entier naturel p tel que $p \leqslant n$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n} k = p + (p+1) + (p+2) + ... + (n-1) + n = \frac{(p+n)(n-p+1)}{2}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^{36} k &= 5 + 6 + 7 + ... + 35 + 36 \\ &= \frac{(5+36)(36-5+1)}{2} \\ &= 41 \times 18 \\ &= 738 \end{aligned}$$

démonstration

Soit $S = \sum_{k=p}^{n} k = p + (p+1) + (p+2) + ... + (n-1) + (n-2)$.
D'où :
$S = p + (p+1) + (p+2) + ... + (n-1) + n$, ou encore
$S = n + (n-1) + (n-2) + ... + (p+1) + p$
D'où, en sommant ces deux expressions terme à terme, on obtient :
$2S = (n+p) + (n+p) + (n+p) + ... + (n+p) + (n+p)$, et cela avec $n-p+1$ termes, donc :
$2S = (n+p)(n-p+1)$.
d'où, $\boxed{S = \dfrac{(n+p)(n-p+1)}{2}}$.
Avec $p = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

Propriété

Somme des n premiers termes

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \geq p \geq i$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n = \frac{(u_n + u_p)(n-p+1)}{2}$$

Autrement dit : La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suites arithmétiques est donnée par :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier termes}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -5$.

$$\text{On a : } \sum_{k=3}^{10} u_k = u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_{10}$$
$$= \frac{(u_3 + u_{10}) \times (10 - 3 + 1)}{2}$$
$$= (u_3 + u_{10}) \times 4$$

avec $u_3 = u_0 + 3 \times 2 = 1$ et $u_{10} = u_0 + 10 \times 2 = 15$
Donc :

$$\boxed{\sum_{k=3}^{10} u_k = (1 + 15) \times 4 = 64}$$

2 Suites géométriques

Définition

Soit $i \in \mathbb{N}$
(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_i et de raison $q \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq i$ on a $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.

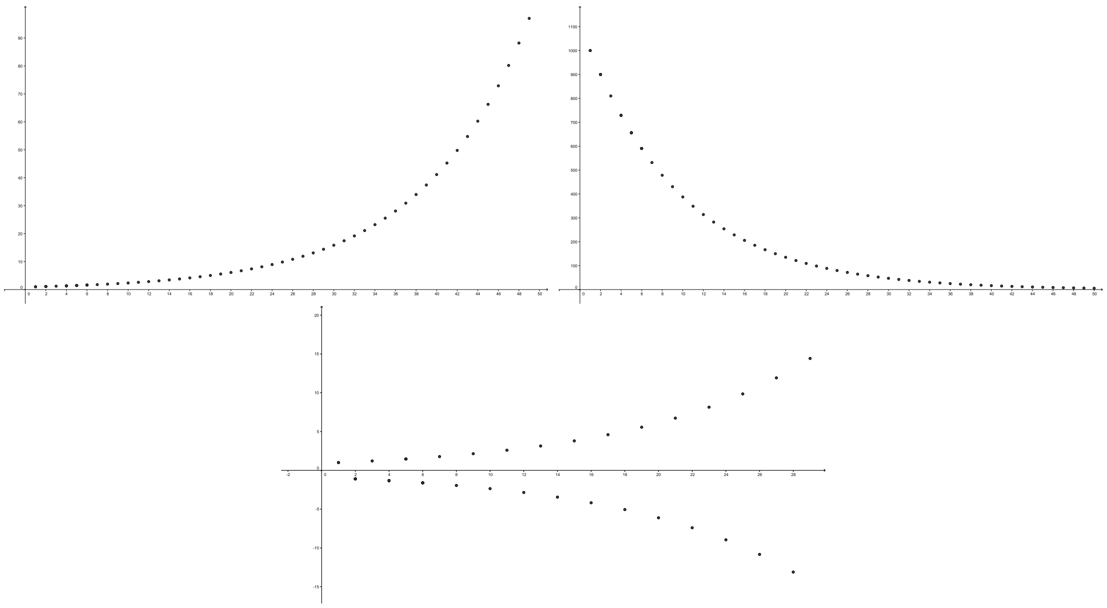
Exemple

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.
On a alors :

$$
\begin{tikzcd}
u_0 = 1 \arrow[r, bend left, "\times 2"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times 2^5"'] & u_1 = 2 \arrow[r, bend left, "\times 2"] & u_2 = 4 \arrow[r, bend left, "\times 2"] & u_3 = 8 \arrow[r, bend left, "\times 2"] & u_4 = 16 \arrow[r, bend left, "\times 2"] & u_5 = 32
\end{tikzcd}
$$

Propriété

Soit (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_i et de raison $q \in \mathbb{R}$.
Dans ce cas, on a pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq i, p \geq i$ on a $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.
Cas particulier si $p = 0$: $u_n = u_0 \times q^n$.



Propriétés

Variation d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **géométrique** de premier terme u_0 et de raison q.

- si $u_0 > 0$ et $1 < q$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement **croissante**.
- si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement **décroissante**.
- si $u_0 < 0$ et $1 < q$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement **décroissante**.
- si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement **croissante**.
- si $u_0 = 0$ ou $q = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante**.
- si $q < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée.

Exemple

Soit (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{3}{5}$.
$u_0 > 0$ et $q \in]0;1[$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

démonstration

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

1. Dans le cas où $u_0 > 0$ et $q > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et on a :
   $u_{n+1} = u_n \times q$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$, d'où :
   (a) Si $q \in]0;1[$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in]0;1[$ et par conséquent la suite (u_n) est strictement décroissante.
   (b) Si $q > 1$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.
2. Dans le cas où $u_0 < 0$ et $q > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ et on a :
   (a) Si $0 < q < 1$
   alors $0 > q \times u_n > u_n$ par multiplication de chaque membre de l'inégalité par un nombre strictement négatif.
   d'où $0 > u_{n+1} > u_n$ et par conséquent la suite (u_n) est strictement croissante.
   (b) Si $q > 1$
   alors $q \times u_n < u_n$ par multiplication de chaque membre de l'inégalité par un nombre strictement négatif.
   d'où $u_{n+1} < u_n$ et par conséquent la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. (a) Si u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 0$ et par conséquent la suite (u_n) est la suite nulle.
   (b) si $q = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = u_0$ et par conséquent, la suite (u_n) est une suite constante.
4. Si $q < 0$, alors u_{n+1} et u_n sont de signe différents.
   Dans ce cas, on dit que la suite (u_n) est alternée.

Propriété

Pour tout réel $q \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

démonstration

Soient $n \in \mathbb{N}$ et q un réel différent de 1.

$$\begin{aligned} q \times \sum_{k=0}^{n} q^k &= q \times (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \\ &= q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (1-q) \times \sum_{k=0}^{n} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - \left(q \times \sum_{k=0}^{n} q^k\right) \\ &= (1 + q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}) \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriété

Somme des n premiers termes

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \geq p \geq i$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Autrement dit : La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suites géométrique est donnée par :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{7} u_k &= u_0 \times \frac{1 - 2^{7-0+1}}{1 - 2} \\ &= 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} \\ &= 3 \times \frac{1 - 2^8}{-1} \end{aligned}$$

$$= 3 \times (2^8 - 1)$$

démonstration

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{p+k} = u_p \times q^k$.

d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{i=0}^{n-p} u_{p+k} \\
&= \sum_{i=0}^{n-p} \left(u_p \times q^k\right) \\
&= u_p \times \sum_{i=0}^{n-p} q^k \\
&= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}
\end{aligned}$$