

TERMINALES SPÉCIALITÉ MATHS : DM1

2022-2023

Suites et limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2^n$.

Partie A : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 3 \times 2^n + n - 2$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}$$

1. Montrer que pour tout entier n , on a :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{-n+3}{2^{n+1}}$$

2. En déduire que la suite (w_n) est décroissante à partir du rang 3.
3. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.