TSC : DM1

2022-2023

Suites et limites - correction

Partie A : Étude de la suite (u_n)

1. ○ **hérédité** : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
   d'où :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - n + 3 \\ &= 2\left(3 \times 2^n + n - 2\right) - n + 3 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + n - 1 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 1 - 1 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2. \end{aligned}$$
   La proposition est donc héréditaire.

   ○ **initialisation** :
   $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0
   Conclusion :
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$.

2. $$\left.\begin{array}{rcl} 2 > 1 \quad \text{donc} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times 2^n & = & +\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 & = & +\infty \end{array}\right\} \text{d'où } \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Partie B : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. $$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n} \\ &= \frac{2u_n - n + 3}{2^{n+1}} - \frac{2u_n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2u_n - n + 3 - 2u_n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{-n+3}{2^{n+1}} \quad \text{qui est du signe de} \quad -n+3 \end{aligned}$$

   Donc $w_{n+1} - w_n < 0$ si $n > 3$ et par conséquent $\boxed{(w_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 3}$

2. $$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \frac{u_n}{v_n} = w_n = 3 + \frac{n-2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

   En admettant que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, on obtient :

   $$\begin{array}{rcccl} 0 & < & \dfrac{n}{2^n} & \leqslant & \dfrac{1}{n} \\ 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} & < & 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n} & \leqslant & 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{n} \\ 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} & < & \dfrac{u_n}{v_n} & \leqslant & 3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{array}$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3}$