DS 2 du 22.09.2023
Correction.

Exercice 1

① Soit $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} = u_{n+1} + \frac{6}{5}$$
$$= -\frac{2}{3}u_n - 2 + \frac{6}{5}$$
$$= -\frac{2}{3}u_n - \frac{4}{5}$$

or $w_n = u_n + \frac{6}{5}$, donc $u_n = w_n - \frac{6}{5}$, d'où :

$$w_{n+1} = -\frac{2}{3}\left(w_n - \frac{6}{5}\right) - \frac{4}{5}$$
$$= -\frac{2}{3}w_n + \frac{12}{15} - \frac{4}{5}$$
$$= -\frac{2}{3}w_n + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}$$
$$= -\frac{2}{3}w_n$$

D'autre part, $w_0 = u_0 + \frac{6}{5} = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}$

Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = \frac{16}{5}$

② (w_n) étant une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = \frac{16}{5}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \frac{16}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

③ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - \frac{6}{5}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{16}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{6}{5}}$$

④ $-1 < -\frac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$,

d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{6}{5}}$

Exercice 2

<u>Hérédité</u>

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{2}{2+3n}$

On a donc :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{3u_n + 2}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2}{2+3n}}{3 \cdot \frac{2}{2+3n} + 2}$$ d'après l'hypothèse de récurrence

$$= \frac{\frac{4}{2+3n}}{\frac{6 + 2(2+3n)}{2+3n}}$$

$$= \frac{4}{2+3n} \times \frac{2+3n}{10+6n}$$

$$= \frac{4}{10+6n}$$

$$= \frac{2}{5+3n}$$

$$= \frac{2}{2+3(n+1)}$$, d'où l'hérédité

Initialisation

$u_0 = 1$ et $\frac{2}{2+3\times 0} = \frac{2}{2} = 1$

donc $u_0 = \frac{2}{2+3\times 0}$, d'où l'initialisation pour $n=0$

Conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{2+3n}}$$