Nombres complexes : Forme algebrique

Exercice 1

1) a) Supposons que $a+b$ est solution de (E), on a alors :

$$(a+b)^3 = 15(a+b)+4$$

or $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

d'où $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 15(a+b)+4$

$$a^3+b^3+3ab(a+b) = 15(a+b)+4$$
$$a^3+b^3+3ab(a+b) - 15(a+b) - 4 = 0$$

d'où $\boxed{a^3+b^3+3(a+b)(ab-5)-4=0}$

b) Soit a et b deux réels tel que $a+b$ est solution de (E) et $ab=5$

On pose $A = a^3$ et $B = b^3$

On a donc $ab-5=0$ et par consequent

$$a^3+b^3-4=0$$

d'où $A+B-4=0$, donc $A+B=4$

d'autre part : $ab=5$ donc $(ab)^3=125$

d'où $a^3b^3=125$

et par consequent $AB=125$

$$\boxed{\text{d'où, } A \text{ et } B \text{ sont solutions de } S : \begin{cases} A+B=4 \\ AB=125 \end{cases}}$$

c) Soit A et B deux réels tels que $A+B=4$ et $AB=125$
Les relations entre les coefficients d'un polynôme du second degré, la somme de ces racines et le produit de ses racines permettent d'affirmer que A et B sont les racines de $P = X^2 - 4X + 125$

Soit Δ le discriminant de P
$\Delta = 4^2 - 4 \times 125 = -484$
$\Delta < 0$ donc $X^2 - 4X + 125$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ et par conséquent, il n'existe aucun réel A et B tel que $A + B = 4$ et $AB = 125$

(2) a) En mettant le polynôme P sous forme canonique, on obtient

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 4x + 125 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 125 \\ &= (x-2)^2 + 121 \end{aligned}$$

d'où $P(x) = 0 \iff (x-2)^2 + 121 = 0$

or d'après l'énoncé, $(11i)^2 = -121$

donc
$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff (x-2)^2 - (11i)^2 = 0 \\ &\iff (x-2-11i)(x-2+11i) = 0 \\ &\iff x-2-11i = 0 \text{ ou } x-2+11i = 0 \\ &\iff x = 2+11i \text{ ou } x = 2-11i \end{aligned}$$

d'où $\boxed{A = 2+11i \text{ et } B = 2-11i}$

Réciproquement : $A+B = 2+11i+2-11i$
$= 4$

et $AB = (2+11i)(2-11i)$
$= 4-(11i)^2$
$= 4-(-121)$
$= 125$

$\boxed{\text{Donc les solutions du système (S) sont } A = 2+11i \text{ et } B = 2-11i}$

b) $(2+i)^2 = 4+4i+i^2$
$= 4+4i-1$
$= 3+4i$

$(2+i)^3 = (2+i)^2(2+i)$
$= (3+4i)(2+i)$
$= 6+3i+8i+4i^2$
$= 6+11i-4$
$= 2+11i$
$= A$

$(2-i)^3 = (2-i)^2(2-i)$
$= (4-4i+i^2)(2-i)$
$= (4-4i-1)(2-i)$
$= (3-4i)(2-i)$
$= 6-3i-8i+4i^2$
$= 6-11i-4$
$= 2-11i$
$= B$

c) On peut deduire de la question suivante que $a = 2+i$ et $b = 2-i$ conviennent car $a^3 = A$ et $b^3 = B$

Une solution de E pourrait donc etre $x_0 = a+b = 2+i+2-i = 4$

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4$$
$$= 0$$

D'ou $4^3 = 15 \times 4 - 4$ et par consequent

$\boxed{\text{4 est bien une solution de E}}$