Nombres complexes : Forme algébrique

Exercice 1

Le mathématicien italien Giordano Cardano (Jérôme Cardan pour les francais) a publier au XVI^e sciècle une méthode ayant pour but de résoudre les équations de la forme $x^3 = px + q$
Raphaël Bombelli, un autre mathématicien italien a voulu utiliser cette méthode pour résoudre l'équation **(E)** :

$$x^3 = 15x + 4$$

On va étudier dans cet exercice les calculs de Bombelli.

1. Avec la méthode de Cardan
   (a) On pose $x = a + b$. Démontrer que si $a + b$ est solution de **(E)** alors,
   $$a^3 + b^3 + 3(a + b)(ab - 5) - 4 = 0$$
   (b) L'idée de Cardan est alors d'imposer en plus la condition $ab = 5$.
   Démontrer alors que $A = a^3$ et $B = b^3$ sont solutions du système :
   $$\textbf{(S)} : \begin{cases} A + B &= 4 \\ A \times B &= 125 \end{cases}$$
   (c) Essayer de résoudre ce système et expliquer le problème rencontrer par Bombelli.
2. L'idée de Bombelli Pour aller plus loin, Bombelli eut l'idée "complètement folle" de faire comme si -121 avait une racine carré qu'il osa noter $11\sqrt{-1}$. Plus tard, Euler nota $\sqrt{-1} = i$, autrement dit, ce nouveau **nombre imaginaire** i vérifie $i^2 = -1$.
   (a) Expliquer pourquoi on peut déduire de la résolution du système (S) que :
   $$(A = 2 + 11i \quad \text{et} \quad B = 2 - 11i) \qquad \text{ou} \qquad (A = 2 - 11i \quad \text{et} \quad B = 2 + 11i)$$
   (b) Développer $(2 + i)^2$ et $(2 + i)^3$. Puis $(2 - i)^2$ et $(2 - i)^3$.
   (c) En déduire deux nombres a et b qui conviennent, puis une solution de **(E)**

Exercice 2

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4 - 5i$.
Déterminer la forme algébrique de $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $3z_1 + 4z_2$.

Exercice 3

Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

- $z_1 = (1 + 3i) + (2 - i)$
- $z_2 = (5 - i)(7 + 4i)$
- $\left(\dfrac{1}{2} - 4i\right) - \left(-\dfrac{3}{2} + 2i\right)$
- $\left(\dfrac{3}{4}i - 2\right) - (i + 1)$

Exercice 4

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4 - 5i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times \overline{z_1}$ et $z_2 \times \overline{z_2}$
2. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times \overline{z}$ est un réel.

Exercice 5

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 2 - 3i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{1}{z_1}$ et $\dfrac{1}{z_2}$
2. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ est la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$.

Exercice 6

On considère les nombres complexes $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2 + 4i$ et $z_3 = -3 - i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_2}{z_3}$.

3. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_3}$.

Exercice 7

Ecrire le conjugué des nombres suivant et donner le résultats sous forme algébrique :

1. $\dfrac{1}{3i}$
2. $\dfrac{2-4i}{3+2i}$
3. $(4+5i)^2$
4. $\dfrac{(3-4i)(4+i)}{2+3i}$

Exercice 8

Ecrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué des expressions suivantes :

1. $z^2 - iz + 3i - 4$
2. $3i + (2-i)z$
3. $\dfrac{3z+i}{z-i}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $5z + 2i = (1+i)z - 3$
2. $\dfrac{z-i}{z+1} = 4i$
3. $3z(z+i) = -iz$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants :

1. $$\left\{\begin{array}{rcl} z + z' & = & 1 + 4i \\ z - z' & = & 1 - 2i \end{array}\right.$$
2. $$\left\{\begin{array}{rcl} z - z' & = & -2 + i \\ 2z + 3z' & = & 1 \end{array}\right.$$

3.
$$\begin{cases} iz - 2z' &= -2+i \\ z+(1+i)z' &= -2i \end{cases}$$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z+3+i = 2\overline{z}+7+3i$
2. $2z-4 = 5i+4\overline{z}$
3. $z\overline{z} = z+2$
4. $\overline{z}-1 = z\overline{z}-i$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $4z^2+4z+101 = 0$
2. $z^2+2z-80 = 0$
3. $\dfrac{z^2}{5} - 2z + 5 = 0$

Exercice 13

Factoriser dans $\mathbb{C}$ avec des facteurs du premier degré chacune des expressions suivantes.

1. $P(z) = 4z^2+4z+101$
2. $Q(z) = z^3-6z^2+13z$
3. $R(z) = (z^2+5)(z^2-z-1)$

Exercice 14

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 15

Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ a deux solutions imaginaires pures.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2+az+b)(z^2+4)$
3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 16

Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ et Z le nombre complexe défini par $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

1. exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$
2. En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.

Exercice 17

Soit P un polynôme du second degré à coefficients réels défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.
on a donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
Démonter que si P admet une racine complexe z_0, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P.

Exercice 18

On considère l'équation **(E)** :

$$2z^4 - 5z^2 - 12 = 0$$

1. On pose $Z = z^2$. Résoudre l'équation $2Z^2 - 5Z - 12 = 0$
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de **(E)**.

Exercice 19

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeur complexes définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1+i)u_n$$

1. Calculer les u_1, u_2 et u_3.
2. Donner la nature de cette suite.
3. Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 20

1. On sait que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure. Déterminer cette solution.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - 2\mathrm{i})\,(z^2 + az + b)$.

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 21

soit z et z' deux complexes tels que $z\overline{z} = 1$ et $z'\overline{z'} = 1$ et a un réel.
On note :

$$Z = z + z' + azz' + 1 \text{ et } Z' = z + z' + a + zz'$$

1. Montrer que $Z' = zz'\overline{Z}$.
2. On suppose que $1 + zz' \neq 0$. Montrer que le nombre $u = \dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.