Nombres complexes : Forme algébrique

Le mathématicien italien Giordano Cardano (Jérôme Cardan pour les francais) a publier au XVI^e sciècle une méthode ayant pour but de résoudre les équations de la forme $x^3 = px + q$
Raphaël Bombelli, un autre mathématicien italien a voulu utiliser cette méthode pour résoudre l'équation suivante :

$$x^3 = 15x + 4$$

Bombelli eut l'idée "complètement folle" de faire comme si -121 avait une racine carré qu'il osa noter $11\sqrt{-1}$.
Plus tard, Euler nota i le nombre tel que $i^2 = -1$, autrement dit, ce nouveau est un **nombre imaginaire**. Néanmoins, cette idée folle lui permit de trouver les 3 solutions réelles de l'équation dont $x = 4$.
De nouveaux nombres ont donc été crée, on les appela les nombres complexes.

I Forme algébrique

Définition

Il existe un ensemble note $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
- L'addition et la multiplication de deux nombres réels se prolonge dans $\mathbb{C}$ et les régles de calculs restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe, **noté** i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ ou a et b sont deux réels. Cette écriture est appelé **forme algébrique** de z.

Exemples

- 3, $2i$, $5 - 3i$ sont des nombres complexes.
- $\begin{aligned} 4 + 2i - (3 - i) &= 4 + 2i - 3 + i \\ &= 1 + 3i \end{aligned}$
- $\begin{aligned} (4 + 2i) \times (1 + i) &= 4 + 4i + 2i + 2i^2 && \text{Comme en calcul littéral !} \\ &= 4 + 4i + 2i + 2 \times (-1) && \text{car } i^2 = -1 \text{ par définition} \\ &= 4 + 4i + 2i - 2 \\ &= 2 + 6i \end{aligned}$

Remarque

- On dit que a est la partie réel de z et on écrit $a = \operatorname{Re} z$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on écrit $b = \operatorname{Im} z$
- Tout nombre complexe de la forme ib ou $b \in \mathbb{R}$ est appelé imaginaire pur.
- $(-i)^2 = -i \times (-i) = i \times i = i^2 = -1$

Propriétés

- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $\operatorname{Im} z = 0$.
- Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re} z = 0$.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imagimaire

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$ est le nombre complexe, **noté** $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemples

- $2 - 4i$ et $2 + 4i$ sont deux nombres complexes conjugués l'un de l'autre.
- le conjugué de $z = 5i$ est $\overline{z} = -5i$
- le conjugué de $z = 8$ est lui même, c'est à dire $\overline{z} = 8$

Remarques

- Pour tout nombre réel a, on a $\overline{a} = a$
- pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$

Propriétés

- Le nombre complexe z est réel si et seulement si $z - \overline{z} = 0$.
- Le nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$
- $z\overline{z} = 0$ si et seulement si $z = 0$

Exemples

- Avec $z = 2 + 4i$, on a :
  $z\overline{z} = (2 + 4i)(2 - 4i) = 2^2 - (4i)^2 = 4 - (-16) = 20$
- Avec $z = -1 - i$, on a :
  $z\overline{z} = (-1 - i)(-1 + i) = (-1)^2 - (-i)^2 = 1 - (-1) = 2$

Démonstration

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$. a et b sont donc deux réels.

- $$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+ib)(a-ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 \\ &= a^2 - i^2b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$
  or a et b sont deux réels, donc $\boxed{z\overline{z} = a^2 + b^2 \text{ est un réel positif}}$.
- $$\begin{aligned} z\overline{z} = 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 0 \quad \text{et} \quad b^2 = 0 \qquad \text{car } a^2 \geqslant 0 \text{ et } b^2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0 \end{aligned}$$

II Opérations sur les nombres conjugués

Théorème

Soient z_0 et z_1 deux nombres complexes. et n un entier relatif non nul

1. $\overline{z_0 + z_1} = \overline{z_0} + \overline{z_1}$
2. $\overline{z_0 \times z_1} = \overline{z_0} \times \overline{z_1}$
3. Avec $z_1 \neq 0$, on a $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$
4. Avec $z_1 \neq 0$, on a $\overline{\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z_0}}{\overline{z_1}}$
5. $\overline{z_0^n} = \overline{z_0}^n$

Remarque

Pour tout nombre complexe non nul z, on a $z^0 = 1$

Exemples

- Le conjugué de $z = (2+3i)(1+i)$ est $\overline{z} = (2-3i)(1-i)$
- Le conjugué de $z = \dfrac{1}{4-2i}$ est $\overline{z} = \dfrac{1}{4+2i}$
- Le conjugué de $z = \dfrac{2+3i}{1+i}$ est $\overline{z} = \dfrac{2-3i}{1-i}$
- Le conjugué de $z = (-2-6i)^3$ est $\overline{z} = (-2+6i)^3$

Démonstration

Soit z_0 et z_1 deux nombres complexes de forme algébrique respective :

$$z_0 = a_0 + ib_0 \quad \text{et} \quad z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{où } (a_0, b_0, a_1, b_1) \in \mathbb{R}^4$$

1. $\overline{z_0 + z_1} = \overline{a_0 + ib_0 + a_1 + ib_1} = \overline{a_0 + a_1 + i(b_0 + b_1)} = a_0 + a_1 - i(b_0 + b_1)$
   D'autre part :
   $\overline{z_0} + \overline{z_1} = a_0 - ib_0 + a_1 - ib_1 = a_0 + a_1 - i(b_0 + b_1)$
   Donc on a bien $\boxed{\overline{z_0 + z_1} = \overline{z_0} + \overline{z_1}}$.
2. $$\begin{aligned} \overline{z_0 \times z_1} &= \overline{(a_0 + ib_0) \times (a_1 + ib_1)} \\ &= \overline{a_0 a_1 + ia_0 b_1 + ib_0 a_1 + i^2 b_0 b_1} \\ &= \overline{a_0 a_1 + ia_0 b_1 + ib_0 a_1 - b_0 b_1} \quad \text{Car } i^2 = -1 \\ &= \overline{a_0 a_1 - b_0 b_1 + i(a_0 b_1 + ib_0 a_1)} \\ &= a_0 a_1 - b_0 b_1 - i(a_0 b_1 + b_0 a_1) \end{aligned}$$
   D'autre part :
   $$\begin{aligned} \overline{z_0} \times \overline{z_1} &= (a_0 - ib_0) \times (a_1 - ib_1) \\ &= a_0 a_1 - ia_0 b_1 - ib_0 a_1 + i^2 b_0 b_1 \\ &= a_0 a_1 - ia_0 b_1 - ib_0 a_1 - b_0 b_1 \quad \text{car } i^2 = -1 \\ &= a_0 a_1 - b_0 b_1 - i(a_0 b_1 + b_0 a_1) \end{aligned}$$
   Donc on a bien $\boxed{\overline{z_0 z_1} = \overline{z_0} \times \overline{z_1}}$.
3. Avec $z_1 \neq 0$, on a
   $$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} &= \overline{\left(\frac{\overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{a_1 - ib_1}{z_1 \overline{z_1}}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{a_1}{z_1 \overline{z_1}} - i\frac{b_1}{z_1 \overline{z_1}}\right)} \end{aligned}$$
   or, $z_1 \overline{z_1}$ étant un réel, $\dfrac{a_1}{z_1 \overline{z_1}}$ et $\dfrac{b_1}{z_1 \overline{z_1}}$ sont deux réels, d'où
   $$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} &= \frac{a_1}{z_1 \overline{z_1}} + i\frac{b_1}{z_1 \overline{z_1}} \\ &= \frac{a_1 + ib_1}{z_1 \overline{z_1}} \\ &= \frac{z_1}{z_1 \overline{z_1}} \\ &\boxed{= \frac{1}{\overline{z_1}}} \end{aligned}$$
4. Avec $z_1 \neq 0$, on a et en réutilisant les propriétés 2 et 3, on obtient :
   $$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_0}{z_1}\right)} &= \overline{\left(z_0 \times \frac{1}{z_1}\right)} \\ &= \overline{z_0} \times \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} \\ &= \overline{z_0} \times \frac{1}{\overline{z_1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{= \frac{\overline{z_0}}{\overline{z_1}}}$$

5. ◦ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^0 = 1$, d'où $\overline{z^0} = \overline{z}^0$
   ◦ Démontrons ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ par récurrence
   initialisation
   D'une part $\overline{z^1} = \overline{z}$, d'autre part $\overline{z}^1 = \overline{z}$
   Donc on a bien $\overline{z^1} = \overline{z}^1$ et par conséquent la proposition est bien vérifiée pour $n = 1$.
   Hérédité
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Supposons que la proposition est vraie pour l'entier n, c'est a dire que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ et démontrons que $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\ &= \overline{z^n} \times \overline{z} && \text{d'après la propriété 2} \\ &= \overline{z}^n \times \overline{z} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \overline{z}^{n+1} \end{aligned}$$

   d'où l'hérédité.
   conclusion
   La proposition est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   ◦ Pour terminer, pour tout entier relatif m strictement négatif, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = -n$, donc :

$$\overline{z_0^m} = \overline{\left(\frac{1}{z_0^{-m}}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{z_0^n}\right)} = \frac{1}{\overline{z_0^n}} = \frac{1}{\overline{z_0}^n} = \overline{z_0}^{-n} = \overline{z_0}^m$$

III Equation du second degrés

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, c'est trouver toutes les solutions complexes de cette équation.

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ a toujours des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation une solutions double réelle : $z = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Remarque
La démonstration de cette propriété est faite sur le même principe que celle faite dans $\mathbb{R}$ en utilisant la forme canonique du polynôme.

Exemple
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 8z + 20 = 0$

Correction
Soit Δ le discriminant de $z^2 + 8z + 20$
$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 20 = -16 = (4i)^2$
$Delta < 0$, donc $z^2 + 8z + 20 = 0$ a deux solutions z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$ qui sont :

$$z_1 = \frac{-8 + 4i}{2} = -4 + 2i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-8 - 4i}{2} = -4 - 2i$$