Eléments de logiques et technique de démonstration

L'activité mathématique se développe suivant trois axes principaux :

- La construction d'objet mathématiques, qui peuvent être des nombres, des fonctions, des figures géométriques... Ces objets servent de modèles pour étudier des phénomènes physiques, chimiques, biologiques, économiques ...
- La recherche de propriétés reliant ces objets : ces recherches permettent d'obtenir des conjectures. Elles peuvent être élaborées par exemple à partir de cas particulier ou par utilisation de moyen informatiques.
- La démonstration des propriétés énoncées précédemment. Une fois fois démontrées, ces propriété prennent le nom de théorème.

Pour distinguer les différents théorèmes, des noms leur ont été donné :

- **proposition :** Une proposition peut être vraie ou fausse.
- **propriété :** pour la plupart des résultats.
- **théorème :** pour les résultats les plus fondamentaux.
- **corollaire :** pour les conséquences (souvent immédiates) des résultats précédents.
- **lemme :** pour certain résultats préliminaires, utiles pour la suite d'un cours, mais dont l'intérêt intrinsèque est assez limité.

Les démonstrations obéissent à des règles précises que nous allons voir par la suite.

I Assertions et prédicats

1 Assertions

Définition 1. Contentons nous de dire, de facon naïve, qu'une assertion est un énoncé susceptible de prendre l'une ou l'autre des deux valeurs logiques, le vrai (V) ou le faux (F).

Exemple 1.

- "2 est un entier impair" est une assertion fausse.
- "$2 + 1 = 3$" est une assertion vraie.
- "$2x + 7$" n'est pas une assertion.

- "$2x+2=0$" n'est pas non plus une assertion puisque qu'on ne peut pas dire si elle est vrai ou fausse tant qu'on ne connaît pas la valeur de x.

2 Prédicat et quantificateurs

Un prédicat est un énoncé $A(x,y,z,..)$ dépendant de variables $x,y,z,...$ tel que lorsque l'on substitue à ces variables des éléments d'un ensemble (souvent réels ou complexes en terminale), on obtienne une assertion.

- "x est pair" est donc un prédicat sur $\mathbb{N}$.
- "$x+y^2=0$" est un prédicat à deux variables sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{C}^2$ selon l'ensemble dans lequel on travaille.
- "$x^2+2x+1=0$" est aussi un prédicat sur $\mathbb{R}$.

A partir d'un prédicat $A(x)$ à une variable x dans un ensemble E (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On peut construire deux assertions :

- $\forall x \in E, A(x)$ qui se lit :"**Quelque soit** x appartenant à E, $A(x)$".
- $\exists` x \in E : A(x)$ qui se lit :"**Il existe** x appartenant à E tel que $A(x)$"

Exemple 2.

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 \geqslant 0$ est une assertion fausse car $i^2=-1$ et i est un élément de $\mathbb{C}$.
- $\exists x \in \mathbb{C} : x^2 > 0$ est une assertion vraie car $1 \in \mathbb{C}$ et $1^2 > 0$.

II Connecteurs logiques élémentaires

1 le NON, le ET et le OU

Soit A et B deux assertions. Des connecteurs logiques vont nous permettre de leur associer trois nouvelles assertions :

1. le **non**
   (non$A$), est vraie lorsque A est fausse, et fausse lorsque A est vraie.
2. le **et**
   (A et B), est vraie lorsque les deux assertions A et B sont vraies, et fausse sinon.
   $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{C}, x^2+1 > 0)$ est une assertion fausse.
3. le **ou**
   (A ou B), est vraie lorsque au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.
   $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{C}, x^2+1 > 0)$ est une assertion vraie.

Ces connecteurs logiques permettent de construire de nouvelles assertions dites composées noté P(A,B,C,...), dont on connaît la valeur logique dés que l'on connaît celles des assertions A, B, C .... Les valeurs de vérité des ces nouvelles assertions peuvent être reprisent dans des tables appelées tables de vérités. Lorsque deux assertions composées ont des tables de vérités qui coïncident, on dit qu'elles sont équivalentes (plus précisément tautologiquement équivalentes).

A	non**A**
V	F
F	V

A	**B**	**A** et **B**	**A** ou **B**
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Toute les autres connecteurs peuvent être défini à l'aide des ces connecteurs élémentaires.

2 L'implication

Soit A et B deux assertions. On définie l'assertion A implique B, noté $A \Rightarrow B$ par la table de vérité ci-dessous.

A	**B**	$\mathbf{A \Rightarrow B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A $\Rightarrow$ B signifie :"Si l'assertion A est vraie, alors l'assertion B l'est aussi". On remarque que si l'assertion A est fausse, alors $A \Rightarrow B$ est vraie. En effet, on peux démontrer n'importe quoi en partant une assertion fausse. La démonstration suivante en donne un exemple. En partant de l'assertion fausse $1 = 2$ on peut démontrer que $7 = 0$.

supposons que $1 = 2$.
Donc $2 - 1 = 2 - 2$, c'est à dire $1 = 0$.
On en déduit que $7 \times 1 = 7 \times 0$ et, par conséquent $7 = 0$.
L'assertion $(1 = 2) \Rightarrow (7 = 0)$ est donc vraie.

Exemple 3.
- $\forall x \in \mathbb{R}, (2x = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 167)$ est une assertion vraie.
- Si les poules ont des dents, alors on peut mettre paris en bouteilles est aussi une assertion vraie (au sens mathématiques)

- Compléter la table de vérité suivante pour montrer non$A$ ou B est équivalent à $A \Rightarrow B$.

A	non**A**	**B**	nonA ou **B**	A $\Rightarrow$ B
V		V		V
V		F		F
F		V		V
F		F		V

Compléter la table de vérité suivante.

A	**B**	non**B**	A et nonB	A $\Rightarrow$ B
V	V			V
V	F			F
F	V			V
F	F			V

Vous remarquerez que A et nonB est la négation de A $\Rightarrow$ B, On en déduit que pour montrer qu'une implication est fausse, il suffit d'avoir un contre exemple. non (A $\Rightarrow$ B) est équivalent à A et nonB. Des exemples seront repris plus tard au chapitre sur la négation des quantificateurs.

3 L'équivalence

Soit A et B deux assertions. On définie l'assertion A équivalent à B, noté $A \Leftrightarrow B$ par la table de vérité ci-dessous.

A	**B**	**A $\Leftrightarrow$ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Montrer en complétant la table de vérité ci-dessous que A $\Leftrightarrow$ B est équivalent à (A $\Rightarrow$ B) et (B $\Rightarrow$ A)

A	**B**	A $\Rightarrow$ B	B $\Rightarrow$ A	(A $\Rightarrow$ B) et (B $\Rightarrow$ A)	A $\Leftrightarrow$ B
V	V				V
V	F				F
F	V				F
F	F				V

III Négation des quantificateurs

Les règles suivantes ne font que codifier le sens intuitif des quantificateurs.

- non $(\forall x \in \mathbb{R}, A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, \text{non}A(x))$

- non $(\exists x \in \mathbb{R}, A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \text{non} A(x))$

Exemple 4.

- Une fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ si :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

  La négation d'une fonction croissante est donc :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a < b) \text{ et } (f(a) > f(b))$$

- soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. f est continue en a si :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in I, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

  f est donc non continue en a si :

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I, (|x-a| < \alpha) \text{ et } (|f(x) - f(a)| \geq \epsilon)$$

IV Technique de démonstration

Une théorie mathématique est est définie par l'ensemble des objets de la théorie, des axiomes (assertions admises comme étant vraies), des règles régissant l'usage des signes de la théorie (+, -, $\in$, =, ...), et des schéma permettant de déduire des relations vraies en partant des axiomes ou d'autres relations vraies. Une suite de telle relation est une démonstration.

1 Modus ponens

Compléter la table de vérité suivante.

A	**B**	**A** $\Rightarrow$ **B**	**A** et (**A** $\Rightarrow$ **B**)	(**A** et (**A** $\Rightarrow$ **B**)) $\Rightarrow$ **B**
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Donc, pour démontrer que B est un théorème, il suffit de vérifier que A est vraie ainsi que A $\Rightarrow$ B.
En pratique, d'une part, pour démontrer A $\Rightarrow$ B, on suppose A vraie, et en utilisant les lois et théorèmes de la théorie, on montre que B est vraie.
D'autre part, A est vraie est souvent une donnée de l'énoncé, un résultat des questions précédentes où un résultat connu du cours.

2 Transitivité de l'implication

Compléter la table de vérité ci-dessous.

A	**B**	**C**	$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	$\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}$	A et $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$ et $(\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})$	$(A$ et $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B})$ et $(\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})) \Rightarrow C$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

On peut déduire de cette table que pour démontrer A $\Rightarrow$ C il suffit de démontrer que A $\Rightarrow$ **B** et que B $\Rightarrow$ C. Ce schéma est généralement utilisé de manière naturel.

3 Démonstration par contraposition

Montrer en complétant les tables de vérités suivantes, montrer que A $\Rightarrow$ B est équivalent à nonB $\Rightarrow$ nonA

A	non**A**	**B**	non**B**	nonB $\Rightarrow$ nonA	A $\Rightarrow$ B	(nonB $\Rightarrow$ nonA) $\Rightarrow$ (A $\Rightarrow$ B)
V		V			V	
V		F			F	
F		V			V	
F		F			V	

Pour démontrer que A $\Rightarrow$ B est un théorème, il suffit de démontrer que nonB $\Rightarrow$ nonA est vrai. Ce schéma de démonstration est appelé démonstration par contraposition.
En pratique, on suppose que l'assertion est B fausse, et par déduction logique en utilisant les régles régissant la théorie, l'assertion A sera fausse.

Exemple 5. Soit $p \in \mathbb{Z}$
Démontrer que si p^2 est pair, alors p est pair.

4 Démonstration par l'absurde

Une théorie est dite non contradictoire si elle ne conduit à aucun théorème de la forme A et nonA. Le mathématicien Gödel a montré qu'il était impossible de montrer qu'une théorie est non contradictoire. Soit τ une théorie non contradictoire et τ' la théorie obtenue en ajoutant à τ l'axiome A, les règles et les schémas restant les mêmes. Si l'on prouve que τ' est contradictoire, on peut affirmer que l'assertion A est fausse dans la théorie τ, c'est à dire que non$A$ est un théorème de τ. Cette remarque est à la

base du raisonnement par l'absurde.
Soit C une assertion toujours fausse, par exemple non$A$ et A où A est un théorème quelconque de la théorie, ou encore $1 = 2$ dans l'ensemble des réels.
Compléter la table de vérité suivante :

A	**B**	non**B**	C	(A et nonB)	(A et nonB) $\Rightarrow$ C	A $\Rightarrow$ B
V	V		F			V
V	F		F			F
F	V		F			V
F	F		F			V

La table de vérité précédente montre l'équivalence des assertions (A et nonB) $\Rightarrow$ C et A $\Rightarrow$ B. On peut donc démontrer que (A et nonB) $\Rightarrow$ C pour justifier que A $\Rightarrow$ B. Ce schéma de démonstration est appelé démonstration par l'absurde. Ce schéma permet de faire les démonstrations utilisant des théorèmes de la théorie ayant comme hypothèse fois A ou non$B$, On peut donc utiliser beaucoup plus de théorèmes que dans les schémas de démonstration précédents.
En pratique, on suppose que l'assertion A est vraie et que l'assertion B est fausse, puis par déduction logique en utilisant les règles de la théorie, on obtient une assertion C qui est toujours fausse du type $1 = 2$ dans l'ensemble des réels, ou A et non$A$ ou encore B et non$B$.

Exemple 6. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

5 Démonstration par récurrence

V Exercices

Exercice 1

Soit A et B deux assertions. Montrer à l'aide des tables de vérité que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. non (A ou B) est tautologiquement équivalent à nonA et nonB
   Autrement dit, le contraire d'avoir une pomme ou une poire dans les mains est de ne pas avoir de pomme et de ne pas avoir de poire dans les mains.
2. non (A et B) est tautologiquement équivalent à nonA ou nonB
   Autrement dit, le contraire d'avoir une pomme et une poire dans les mains est de ne pas avoir de pomme ou de ne pas avoir de poire dans les mains.

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel.
   Démontrer que si n^2 est un multiple de 3, alors n est aussi un multiple de 3.
2. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f \circ f \text{ est strictement croissante et } f \circ f \circ f \text{ est strictement décroissante}$$

1. Donner la définition d'une fonction strictement décroissante.
2. Donner la définition d'une fonction qui n'est pas strictement décroissante.
3. Démontrer que f est strictement décroissante.

Exercice 4

Soient d et d' deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

1. Démontrer que si $mm' = -1$, alors d et d' sont perpendiculaires.
2. Démontrer que la réciproque est aussi vraie.

Exercice 5

L'affirmation suivante est-elle vraie :
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui n'admettent pas de limite en l'infini, alors la suite $(u_n \times v_n)$ n'admet pas non plus de limite en l'infini.

Exercice 6

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 7

Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que si $m \times n$ est pair, alors m est pair ou n est pair.
2. Démontrer que si $m \times n$ est impair, alors m et n sont impairs.

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et M une matrice carré de taille n.

L'affirmation suivantes est-elle vraie :

$$M^2 = I_n \Leftrightarrow (M = I_n \quad \text{ou} \quad M = -I_n)$$

Exercice 9

La suite de Fibonacci est définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Exercice 10

Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$n = 2^p (2q + 1)$$

où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

Exercice 11

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 2^n \text{ est divisible par } 7$$