Somme de variables aléatoires

Exercice 1

Le cinéma de la commune propose différents tarifs :

- Un tarif plein à 12 euros.
- Un tarif étudiant à 7 euros.
- Un tarif enfant (moins de 12 ans) à 5 euros.

Une étude portant sur la clientèle a montré que 48% des clients paient un tarif plein, 22% des clients un tarifs enfants et les autres un tarif étudiants.
Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12% achètent uniquement un paquet de bonbons a 4 euros, 23% achète uniquement un paquet de pop-corn taille standard à 5 euros et 15% achètent uniquement un paquet de pop-corn grande taille à 7 euros. Les autres clients n'achètent rien.
On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires qui associe à chaque issue respectivement le prix payé pour la place de cinéma et pour les confiseries.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et de X_2.
2. Déterminer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le prix total dépensé pas le client.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1 et X_2.
   (b) En déduire $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

On considère une urne dans laquelle se trouve différentes boules de couleur : des rouges, des vertes et des noires.
On tire avec remise trois boules de l'urne.
a chaque étape, obtenir une boule noire rapporte 5 points, obtenir une boule verte rapporte 2 points et obtenir une boule rouge fait perdre 10 points.
Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note respectivement R_i, V_i et N_i l'événement "obtenir une boule rouge (respectivement une boule verte ou une boule noire) au $i^{\text{ième}}$ tirage.
On note enfin X_1, X_2 et X_3 les variables qui associe à chaque issue le nombre de points obtenu au premier (respectivement deuxième et troisième) tirage.

1. Calculer les valeurs suivantes :
   $X_1\left(V_1 \cap R_2 \cap N_3\right)$, $X_2\left(V_1 \cap R_2 \cap N_3\right)$, $X_1\left(V_1 \cap R_2 \cap R_3\right)$, $X_2\left(V_1 \cap R_2 \cap R_3\right)$ et $X_3\left(V_1 \cap R_2 \cap R_3\right)$.
2. Déterminer les lois de probabilité de X_1, X_2 et X_3.
3. Déterminer $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.

4. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre total de points.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3
   (b) En déduire $E(X)$

Exercice 3

Deux lycées sont situés dans la même commune.
Le premier lycée, noté lycée A, réalise de très bons résultats aux examen : 75% des élèves de l'établissement obtiennent le bac avec mention.
Dans le lycée B, seulement 55% des élèves l'obtiennent avec mention.
On choisit 12 élèves du lycée A et 20 du lycée B.
Le nombre important d'élèves dans chaque lycée permet d'assimiler ces expériences à des tirage avec remises.
On note respectivement X et Y les variables aléatoires associant à chaque issue le nombre délèves du lycée A (respectivement du lycée B) ayant eu le bac avec mention.

1. Donner les lois suivies par X et Y.
2. Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre d'élèves ayant eu le bac avec mention indépendamment de leur lycée d'origine.
   (a) Exprimer Z en fonction de X et de Y.
   (b) En déduire $E(Z)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Calculer $V(Z)$ et en déduire $\sigma(Z)$

Exercice 4

On considère une urne contenant trois boules indiscernables au toucher et numéroté de 1 à 3.
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.
Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on dit qu'il y a "rencontre" au $k^{\text{ième}}$ tirage lorsque l'on tire la boule numéroté k au $k^{\text{ième}}$ tirage.
On cherche a connaître le nombre moyen de rencontres.
Pour tout $(m, k) \in \{1; 2; 3\}^2$, on note $B_{m,k}$ l'événement "On a obtenu la boule m au $k^{\text{ième}}$ tirage".

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires définies par :
   - $X_1 = 1$ si la boule numéroté 1 est tirée en premier et 0 sinon.
   - $X_2 = 1$ si la boule numéroté 2 est tirée en deuxième et 0 sinon.
   - $X_3 = 1$ si la boule numéroté 3 est tirée en troisième et 0 sinon.

   Donner alors $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.
3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de rencontre.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3.
   (b) En déduire le nombre moyen de rencontre.
4. On considère une urne contenant n boules numéroté de 1 à n. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne.

. Quel est théoriquement le nombre moyen de rencontre ?

Exercice 5

Exercice 6

Exercice 7

Exercice 8

Exercice 9

Exercice 10

Exercice 11

Exercice 12

Exercice 13

Exercice 14