

Somme de variables aléatoires - introduction

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré à six faces et à regarder le numéro obtenu. On appelle issue le résultat du lancer.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si l'issue est 5 ou 6, on gagne 3 euros.
- Si l'issue est 1, 2 ou 4, on perd 6 euros.
- Si l'issue obtenu est 3, on gagne 6 euros.

PARTIE A

Dans cette partie, on note X la variable aléatoire qui associe, à chaque issue, le gain réalisé (éventuellement négatif).

1. Quelles sont les valeurs prises par X .
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
3. En déduire l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X .

Le jeu est-il favorable au joueur ?

PARTIE B - On multiplie les gains par 10 (ou les pertes).

Dans cette partie, le responsable du jeu décide de multiplier chacun des gains par 10. On note T la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu avec ces nouvelles règles.

1. Expliquer pourquoi on peut écrire $T = 10X$.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T .
3. Calculer $E(T)$. Quelle relation a-t-on entre $E(T)$ et $E(X)$.
4. Soient a un réel, Y une variable aléatoire définie sur un univers Ω , $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par Y et Z la variable aléatoire définie sur Ω par $Z = aY$.
Démontrer que $E(Z) = a \times E(Y)$.
5. Calculer $V(T)$. Quelle relation a-t-on entre $V(T)$ et $V(X)$.
6. En déduire une relation entre $\sigma(T)$ et $\sigma(X)$?

PARTIE C - On étend le jeu.

Le jeu présenté dans la partie A est trop défavorable au joueur. On demande à celui-ci de lancer une pièce de monnaie en plus du dé. On rajoute, aux règles de la partie A, les règles suivantes :

- Si la pièce tombe sur pile, le joueur gagne 2 euros en plus du gain réalisé avec le dé.
- Si la pièce tombe sur face, ce dernier perd 1 euro en plus du gain réalisé avec le dé.

On note X , Y et Z les variables aléatoires suivantes :

- X qui associe à chaque issue le gain dû au lancer du dé.
- Y qui associe à chaque issue le gain dû au lancer de la pièce.
- Z qui associe à chaque issue le gain total réalisé.

1. Donner la liste des issues de cette expérience aléatoire.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Dans le tableau ci-dessous, par exemple, l'issue $(5, P)$ signifie que le résultat du dé est 5 et celui de la pièce est pile.
Compléter le tableau en associant à chaque issue ω de l'univers, les valeurs $X(\omega)$, $Y(\omega)$ et $Z(\omega)$ correspondantes.

ω	$(1, P)$	$(1, F)$	$(2, P)$	$(2, F)$	$(3, P)$	$(3, F)$	$(4, P)$	$(4, F)$	$(5, P)$	$(5, F)$	$(6, P)$	$(6, F)$
$X(\omega)$												
$Y(\omega)$												
$Z(\omega)$												

4. Expliquer pourquoi on peut écrire $Z = X + Y$.
5. Calculer $E(Z)$
6. Quelle relation a-t-on entre $E(Z)$, $E(X)$ et $E(Y)$?

♥ Propriété (admise)

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω , et a un nombre réel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

★ Exercice 1

Cyprien doit répondre à un QCM de quatre questions indépendantes, comprenant chacune 1 seule réponse correcte parmi 5.

- La question 1 rapporte 1 point si la réponse est correcte et $-0,5$ points si elle est fausse.
- La question 2 rapporte 2 points si la réponse est correcte et $-0,25$ points si elle est fausse.
- La question 3 rapporte 1 point si la réponse est correcte et fait perdre $-0,5$ points si la réponse est fausse.
- La question 4 rapporte 3 point si la réponse est correcte et fait perdre $-0,5$ points si la réponse est fausse.

Cyprien décide de répondre au hasard à ce QCM.

Soit k un entier naturel compris entre 1 et 4 et X_k la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de point associé à la question k .

1. Calculer $E(X_1)$, $E(X_2)$, $E(X_3)$, et $E(X_4)$.
2. Soit X la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de point total obtenu par Cyprien au QCM.
 - (a) Exprimer X en fonction de X_1 , X_2 , X_3 et X_4
 - (b) En déduire $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.