Somme de variables aléatoires

I Rappel

Définition

On appelle variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire sur Ω toute fonction définie sur Ω qui à chaque issue w de Ω associe un réel $X(w)$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

Exemple

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la somme des résultats obtenus.
X peut donc être représentée par le tableau suivant où chaque case représente une issue de l'expérience aléatoire :

2^e^ dé \1^er^ dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

C'est à dire : $X\big((2;4)\big) = 6$, $X\big((1;5)\big) = 6$. ou encore $X\big((1;1)\big) = 2$
En considérant que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on aura :

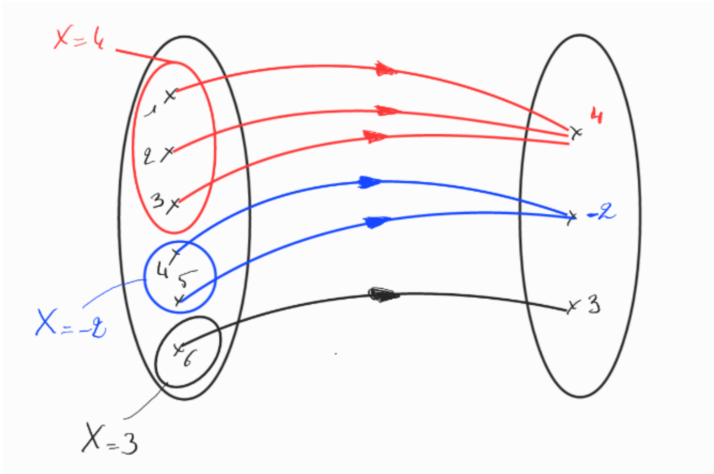
$$P(X=4) = P\big((1;3)\big) + P\big((2;2)\big) + P\big((3;1)\big) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$$

Remarque

En définissant une variable aléatoire sur un univers Ω, on réalise une partition de l'univers.
En effet, si $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ sont les valeurs prisent par la variable aléatoire X, alors :

- $(X = x_0) \cup (X = x_1) \cup ... \cup (X = x_n) = \Omega$
- Pour tout entiers naturels i et j inférieur à n tels que $i \neq j$ on a $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$

On lance un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue 4 si le résultat est inférieur où égale à 3, -2 si le résultat est 4 ou 5 et 3 si le résultat est 6.
Cette situation est représentée par le schéma ci-dessous.



On a donc $X(1) = 4$, $X(2) = 4$, $X(3) = 4$ et pour tout $i \notin \{1; 2; 3\}$, $P(\{i\}) \neq 4$.
D'où $P(X = 4) = P(\{1; 2; 3\}) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω.
Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prisent par la variable aléatoire X et $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ leur probabilités respectives. On a donc $P(X = x_i) = p_i$.
On a alors :

- $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$ ou encore $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Somme de variables aléatoires

Dans ce chapitre, X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini Ω.

1 Définition

Définition

$Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $Z(w) = X(w) + Y(w)$.
$T = aX$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $T(w) = a \times X(w)$.

Exemples

L'exemple vu au I peut aussi être modélisé en utilisant la somme de deux variables aléatoires comme ci-dessous.
On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.
Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du premier dé et Y celle qui associe a chaque issue le résultat du second dé.

La variable aléatoire $Z = X + Y$ associe donc à chaque issue la somme des deux dés.
De même, la variable aléatoire $T = 3X$ associe à chaque issue le triple du résultat du premier dé.
$Z = X + Y$ et $T = 3X$ peuvent peut donc être représentées par les tableaux suivants :

Pour Z :

2^e dé \ 1^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

et pour T :

2^e dé \ 1^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1	3	6	9	12	15	18
2	3	6	9	12	15	18
3	3	6	9	12	15	18
4	3	6	9	12	15	18
5	3	6	9	12	15	18
6	3	6	9	12	15	18

2 Espérance et Variance de somme de variables aléatoires

Propriété (Admise)

X étant une variable aléatoire définie sur un univers Ω, on a :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la valeur 5 si le résultat est supérieur ou égale à 5 et 1 dans le cas contraire.
Le tableau suivant résume bien la situation.

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	1	1	1	5	5
$P(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

et

x_i	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$

dans ce cas :

- $P(X = 1) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \dfrac{4}{6}$
- $P(X = 5) = P(\{5\}) + P(\{6\}) = \dfrac{2}{6}$

d'où :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X = 1) + 5 \times P(X = 5) \\ &= 1 \times \big(P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\})\big) + 5 \times \big(P(\{5\}) + P(\{6\})\big) \\ &= 1 \times P(\{1\}) + 1 \times P(\{2\}) + 1 \times P(\{3\}) + 1 \times P(\{4\}) + 5 \times P(\{5\}) + 5 \times P(\{6\}) \\ &= \sum_{i=1}^{6} X(i) \times P(\{i\}) \end{aligned}$$

démonstration

Soient $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prisent par la variable aléatoire X, i un entier naturel compris entre 1 et n et A_i l'ensemble des issues de l'univers Ω associé à x_i, autrement dit :

$$A_i = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = x_i\}$$

$\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ est donc une partition de l'univers ω et on a $P(X = x_i) = \sum_{\omega \in A_i} P(\omega)$, d'où :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \times \sum_{\omega \in A_i} P(\omega) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\omega \in A_i} x_i \times P(\omega) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\omega \in A_i} X(\omega) \times P(\omega) \right) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \times P(\omega) \qquad \text{car } \{A_1, A_2, ..., A_n\} \text{ est une partition de l'univers.}
\end{aligned}$$

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad \text{et} \qquad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et une pièce de 1 euros. L'expérience aléatoire est donc le lancé des deux éléments (la pièce et le dés).
Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue (Chaque lancé des deux éléments) le résultat du dé et Y la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.
Dans les tableaux suivants, chaque case représente une issue.

Pour X :

pièce\dé	1	2	3	4	5	6
pile	1	2	3	4	5	6
face	1	2	3	4	5	6

et pour Y :

pièce\dé	1	2	3	4	5	6
pile	1	1	1	1	1	1
face	-2	-2	-2	-2	-2	-2

On a donc :

$$E(X) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6 \times \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

et

$$E(Y) = \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(-2 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

D'où, en utilisant la propriété :

$$E(X+Y) = \frac{7}{2} + \frac{-1}{2} = 3 \quad \text{et } E(4X) = 4 \times \frac{7}{2} = 14$$

démonstration

1. En effet, l'espérance de la somme de deux variables aléatoires :
$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega)P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \big(X(\omega) + Y(\omega)\big)P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \big(X(\omega)P(\omega) + Y(\omega)P(\omega)\big) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$
2. Pour l'espérance du produit de la variable aléatoire X par le réel a
$$\begin{aligned} E(aX) &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX)(\omega)P(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \big(a \times X(\omega)\big)P(\omega) \\ &= a \times \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) \\ &= aE(X) \end{aligned}$$
3. Pour la variance du produit de la variable aléatoire X par le réel a
$$\begin{aligned} V(aX) &= E\left((aX)^2\right) - E(aX)^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)\big((aX)(\omega)\big)^2 - \big(aE(X)\big)^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)\big(a \times X(\omega)\big)^2 - a^2E(X)^2 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} a^2P(\omega)X(\omega)^2 - a^2E(X)^2 \\ &= a^2\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)^2 - a^2E(X)^2 \\ &= a^2\left(\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)^2 - E(X)^2\right) \\ &= a^2\big(E(X^2) - E(X)\big)^2 \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$
4. Et pour l'écart type du produit de la variable aléatoire X par le réel a
$\sigma(X) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$.

Remarques

- $\forall b \in \mathbb{R}, E(X+b) = E(X) + b$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$

III Variables aléatoires indépendantes

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ... , X_n, n variables aléatoire définies sur un univers Ω et à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, ..., E_n$.
On dit que X_1, X_2, ... , X_n sont **indépendantes** si pour tout $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ... , $x_n \in E_n$, on a :

$$P\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap ... \cap (X_n = x_n)\big) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$$

Exemple

Dans l'exemple précédent où on lance un dé à 6 faces et une pièce de 1 euros, X étant la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du dé et Y celle qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.
On a pour tout $(i;j) \in [\![1;6]\!] \times \{1;-2\}$, on a

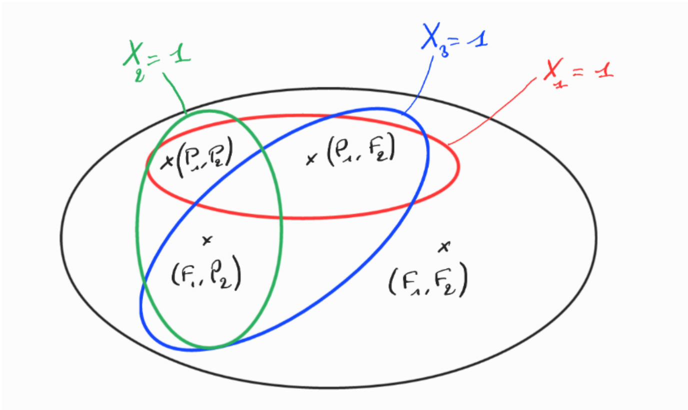
$$P\big((X=i) \cap (Y=j)\big) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad P(X=i) \times P(Y=j) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

D'où l'indépendance de X et Y.

Danger

Si les variables aléatoires X_1, X_2, ... , X_n sont deux à deux indépendantes, alors **on ne peut pas conclure** qu'elles sont indépendantes comme le montre l'exemple suivant :
En effet, si l'on considère deux lancer d'une pièce de monnaie et si l'on note :

- X_1 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le résultat du premier lancer est pile et 0 sinon.
- X_2 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le résultat du second lancer est pile et 0 sinon.
- X_3 la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si le nombre de piles obtenu est impair et 0 sinon.



On a alors X_1 et X_2 qui sont indépendantes, en effet pour tout $(i, j) \in \{0; 1\}^2$:

$$P\big((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\big) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X_1 = i) \times P(X_2 = j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

De même X_1 et X_3 sont indépendantes, en effet pour tout $(i, j) \in \{0; 1\}^2$:

$$P\big((X_1 = i) \cap (X_3 = j)\big) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 0) \times P(X_3 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On montre de même que X_2 et X_3 sont aussi indépendantes.
$\boxed{\text{Donc } X_1,\ X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont } \textbf{deux à deux indépendantes}}$ et pourtant :

$$P\big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3 = 1)\big) = P(\emptyset) = 0 \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\boxed{\text{Donc } X_1,\ X_2 \text{ et } X_3 \textbf{ ne sont pas indépendantes}}$

Propriété (admise)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemple

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(4^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(5^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(6^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{2}\right) + \left((-2)^2 \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la propriété :

$$V(X+Y) = \frac{35}{12} + \frac{9}{4} = \frac{31}{2} \quad \text{et } V(4X) = 4^2 \times \frac{31}{12} = \frac{124}{3}$$

démonstration

Voir exercices

IV Somme de variables aléatoires identiquement distribués

1 Variables aléatoires identiquement distribués

Définition

On dit que deux variables aléatoires sont identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.
Autrement dit, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeur dans $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$
X et Y sont identiquement distribuées si pour tout entier naturel $i \in [\![1;n]\!]$, on a :

$$P(X = r_i) = P\big(Y = r_i\big)$$

Exemple

Une roue de loterie comporte 4 secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et le dernier vaut -400 points.
On fait tourner la roue 4 fois de suite et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancés.
L'expérience aléatoire est donc la succession des quatre lancers.
Soit X_i la variable aléatoire qui associe à chaque issue (4 lancers de roue) le gain du i^{eme} lancer de roue pour i allant de 1 à 4.
X_1, X_2, X_3 et X_4 ont donc la même loi de probabilité, elle sont donc identiquement distribuées.

2 Somme de variables aléatoires identiquement distribués

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ... , X_n, n variables aléatoires définies sur un univers Ω.
On suppose que ces variables aléatoires sont **indépendantes et identiquement distribuées**, et qu'elles ont **la même loi de probabilité** qu'une variable aléatoire X.
On dit dans ce cas que $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ est un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

Propriétés

Soit $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X, on a alors :

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variable aléatoire X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	$0,5$	$0,25$	$0,25$

On a donc :

$$E(X) = \left(\frac{1}{2} \times 300\right) + \left(\frac{1}{4} \times 100\right) + \left(\frac{1}{4} \times (-400)\right) = 75$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 300^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 100^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times (-400)^2\right) - 75^2 = 81875$$

Par conséquent :

- $E(S_4) = 4E(X) = 300$
- $V(S_4) = 4V(X) = 327500$
- $\sigma(S_4) = \sqrt{4} \times \sigma(X) = 150$

démonstration

n effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n)$
  $= E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$
  $= E(X) + E(X) + ... + E(X)$
  $= nE(X)$
- Les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ étant indépendantes, on a :
  $V(S_n) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n)$
  $= V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$
  $= V(X) + V(X) + ... + V(X)$
  $= nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Propriétés

Soit $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ **la moyenne** d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X. On a alors :

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$

- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variable aléatoire X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

On a donc :

$$E(X) == 75$$

$$V(X) = 81875$$

Par conséquent :

- $E(M_4) = E(X) = 75$
- $V(M_4) = \dfrac{81875}{4}$
- $\sigma(M_4) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{81875}}{2}$

démonstration

n effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(M_n) = E\left(\dfrac{1}{n} \times S_n\right) = \dfrac{1}{n} \times E\left(S_n\right) = \dfrac{1}{n} \times nE\left(X\right) = E(X)$
- $V(M_n) = V\left(\dfrac{1}{n} S_n\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 V\left(S_n\right) = \dfrac{1}{n^2} \times nV\left(X\right) = \dfrac{V\left(X\right)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\dfrac{V(X)}{n}} = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

3 Application à la loi binomiale

Propriété (admise)

Toute variable aléatoire Y qui suit une loi binomiales $\mathcal{B}(n;p)$ peut s'écrire comme somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ de paramètre n et p.
On a alors :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np(1-p)$
- $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)}$

démonstration

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Y peut donc s'écrire comme somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, d'où $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$, d'où :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np(1-p)$
- $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)}$