Somme de variables aléatoires

I Rappel

Définition

On appelle variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire sur Ω toute fonction définie sur Ω qui à chaque issue w de Ω associe un réel $X(w)$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω.
Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prisent par la variable aléatoire X et $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ leur probabilités respectives. On a donc $P(X = x_i) = p_i$.
On a alors :

- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$ ou encore $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Somme de variables aléatoires

Dans ce chapitre, X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini Ω.

1 Définition

Définition

$Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $Z(w) = X(w) + Y(w)$.
$T = aX$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $T(w) = a \times X(w)$.

2 Espérance et Variance de somme de variables aléatoires

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

III Variables aléatoires indépendantes

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ... , X_n, n variables aléatoire définies sur un univers Ω et à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, ..., E_n$.
On dit que X_1, X_2, ... , X_n sont **indépendantes** si pour tout $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ... , $x_n \in E_n$, on a :

$$P\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap ... \cap (X_n = x_n)\big) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$$

Propriété (admise)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

IV Somme de variables aléatoires identiquement distribués

1 Variables aléatoires identiquement distribués

Définition

On dit que deux variables aléatoires sont identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.
Autrement dit, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeur dans $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$
X et Y sont identiquement distribuées si pour tout entier naturel $i \in [\![1; n]\!]$, on a :

$$P(X = r_i) = P\big(Y = r_i\big)$$

2 Somme de variables aléatoires identiquement distribués

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ... , X_n, n variables aléatoires définies sur un univers Ω.
On suppose que ces variables aléatoires sont **indépendantes et identiquement distribuées**, et qu'elles ont **la même loi de probabilité** qu'une variable aléatoire X.
On dit dans ce cas que $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ est un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

Propriétés

Soit $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X, on a alors :

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Propriétés

Soit $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ **la moyenne** d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X. On a alors :

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

3 Application à la loi binomiale

Propriété (admise)

Toute variable aléatoire Y qui suit une loi binomiales $\mathcal{B}(n; p)$ peut s'écrire comme somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètre n et p.
On a alors :

- $E(Y) = np$
- $V(Y) = np(1 - p)$
- $\sigma(Y) = \sqrt{np(1 - p)}$