Travaux dirigés
Démonstration par récurrence

2022-2023

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Le raisonnement par récurrence ne s'utilise que lorsque l'on cherche à démontrer qu'une proposition est vraie pour tout **entier naturel** $n \geqslant n_0$.

Théorème

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$
On considère une proposition $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées !

- **initialisation** $\mathcal{P}_n$ est vraie pour l'entier $n = n_0$.
- **hérédité** Pour tout entier naturel $k \geqslant n_0$, $\mathcal{P}_k$ est vraie implique $\mathcal{P}_{k+1}$ est aussi vraie.

Alors on peut conclure que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

Correction

...

Exercice 1

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est un multiple de 6.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+2u_n}$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < u_n \leq 1$$

Exercice 4

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 5

Soit x un nombre réel strictement positif.
On souhaite démontrer la propriété :"$(1+x)^n \geq 1+nx$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

Démontrer que pour la suite (u_n) est croissante.