

# Suites, démonstration par récurrence et calcul de limites

## ★ Exercice 1

L'objectif de cet exercice est d'utiliser les formules du cours sur les suites arithmétiques et géométriques.

1.  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $u_0 = 5$

(a) calculer  $u_{17}$ .

(b) calculer

$$\sum_{k=0}^{17} (u_k)$$

2.  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{3}{2}$  et de premier terme  $v_0 = 1$ .

(a) calculer  $v_{10}$ .

(b) calculer

$$\sum_{k=0}^6 (v_k)$$

## ★ Exercice 2

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  telle que :

$$u_3 = a \text{ ou } a \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=3}^{120} u_k = 125$$

Exprimer  $a$  en fonction de  $r$

### ★ Exercice 3

$(v)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = \frac{2^{n+5}}{3^{n+1}}$$

1. Montrer que  $v$  est une suite géométrique.
2. Donner la raison de cette suite et son sens de variation.

### ★ Exercice 4

1. Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = 5n^3 - n^2 - 7$   
Démontrer que  $u$  est croissante.
2. Soit  $v$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_{n+1} = 5v_n^2 + v_n + 3$  et  $v_0 = -5$   
Démontrer que  $v$  est croissante.
3. Soit  $w$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}$   
Démontrer que  $w$  est décroissante.

### ★ Exercice 5

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_1 = 2$  et tel que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ .

1. Calculer  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ . Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{n+1}{n}$ .

### ★ Exercice 6

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel  $n$ , on définit les points  $(A_n)$  par leurs coordonnées  $(x_n ; y_n)$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées des points  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .
2. Pour construire les points  $A_n$  ainsi obtenus, on écrit le programme Python suivant :

## ✻ Python

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

def const (x , y , nbPoints) :
    X=[x]
    Y=[y]
    for i in range(0 , nbPoints + 1 , 1) :
        X.append(0.8*X[i]-0.6*Y[i])
        Y.append(0.6*X[i]+0.8*Y[i])
    plt.plot(X,Y)
    plt.show()

const(...,...,...)
```

Recopier et compléter la dernière ligne de ce programme pour qu'il construise les points  $A_0$  à  $A_{20}$ .

3. Placer dans un repère orthonormé les points  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ .  
Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points  $A_n$  pour tout  $n$  entier naturel ?
4. Démontrer la conjecture précédente.

## ★ Exercice 7

On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \frac{1}{n}$

1. Etude numérique
  - (a) Démontrer que pour tout  $n > 10$ ,  $u_n \in ] - 0, 1; 0, 1[$ .
  - (b) Déterminer une valeur  $N_0$  telle que pour tout  $n > N_0$ ,  

$$u_n \in ] - 0, 01; 0, 01[$$

2. Généralisation.

- (a) Soit  $e$  un réel strictement positif. Démontrer que pour  $n > \frac{1}{e}$ , on a  $u_n < e$ .

(b) Recopier et compléter la phrase suivante :

"On peut en déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'intervalle  $] - \varepsilon; \varepsilon[$  contient toutes les valeurs ... pour  $n > \dots$ ".

(c) Que peut-on en déduire ?

### ★ Exercice 8

On considère la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{6\sqrt{n} + 1}{2\sqrt{n}}$

1. calculer  $v_{10}, v_{100}, v_{1000}$  et en donner des valeurs approchées à  $10^{-2}$ .
2. Observer la représentation graphique de  $v$  sur une calculatrice. Quelle conjecture peut-on alors faire sur sa limite en  $+\infty$  ?
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_n = 3 + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .
4. On considère l'intervalle  $]2,95; 3,05[$ . Montrer que pour  $n$  supérieur à une certaine valeur  $N_0$  à déterminer, on a  $u_n \in ]2,95; 3,05[$ .
5. Soit  $r$  un réel strictement positif. On considère alors l'intervalle  $]3 - r; 3 + r[$ . Montrer que pour  $n$  supérieur à une certaine valeur  $N_0$  à déterminer, on a  $u_n \in ]3 - r; 3 + r[$ .
6. Conclure en utilisant la définition de la limite finie en  $+\infty$ .

### ★ Exercice 9

Utiliser la définition de la limite d'une suite pour démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$$

### ★ Exercice 10

Déterminer les limites des suites suivantes :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{2n^2 + 4n + 1}$
4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8n^2 - 5n + 2$
5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 3\sqrt{n+1}$

6.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$
7.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n\sqrt{n} - 2n - 3\sqrt{n} - 2$
8.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n\sqrt{n} - 2n - 3\sqrt{n} - 2}{n\sqrt{n+2}}$
9.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 2n - 3\sqrt{n} - 2}{n\sqrt{n+5}}$
10.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 3\sqrt{n} - 2}{\sqrt{2n^2 + 2n + 3}}$
11.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

### ★ Exercice 11

Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et déterminer leurs limites.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } v_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$$

### ★ Exercice 12

On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier  $n \geq 1$ , par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , et pour tout entier naturel  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. En déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \geq \sqrt{n}$
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### ★ Exercice 13

On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier  $n$  non nul, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k}} = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \frac{1}{n + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$$

2. Etudier la convergence des suites définies par :

(a)  $v_n = \frac{n}{n + \sqrt{n}}$

(b)  $w_n = \frac{n}{n + 1}$

3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

### ★ Exercice 14

Déterminer les limites des suites suivantes :

1.  $u_n = 2 \left( -\frac{3}{5} \right)^n$

2.  $u_n = \left( -\frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{n}$

3.  $u_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$

4.  $u_n = \frac{3^n}{2^{2n}}$

5.  $u_n = -\frac{2^{n+1}}{5^{2n}}$

### ★ Exercice 15

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$u_n = \frac{n(n + 2)}{(n + 1)^2}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2. Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .  
 3. Calculer la limite de  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### ★ Exercice 16

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel  $k$  non nul, on a :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. En déduire une expression simple de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer la limite de  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### ★ Exercice 17

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 161$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 8$$

1. A l'aide d'une calculatrice, conjecturer le comportement de la suite  $(u_n)$  en  $+\infty$ .
2. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 20$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
  - (b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  et en déduire celle de  $(u_n)$ .

### ★ Exercice 18

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$$

On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 6$ .

1. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$ .

3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

### ★ Exercice 19

Soit  $a$  un réel et  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par  $u_0 = a$ ,  $v_0 = -\frac{3a}{4}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2v_n)$$

1. A l'aide d'une calculatrice, conjecturer le comportement des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  en  $+\infty$ . Semble-t-il dépendre de  $a$  ?
2. Emettre une conjecture sur la suite  $w_n = 3u_n + 4v_n$  et démontrer cette conjecture.
3. En déduire  $u_n$  en fonction de  $v_n$ , puis  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  seulement.
4. En déduire les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

### ★ Exercice 20

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$$

1. Si la suite  $(u_n)$  converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ .
3. Etudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
4. Prouver que  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.

### ★ Exercice 21

On considère le programme Python ci-dessous :

## Python

```
import math as m

def f(u , s , n) :
    for i in range(n) :
        u=2*u+1-i
        s=s+u
    return[u,s]

print(f(1,1,10))
```

### 1. Partie A

- (a) Justifier que pour  $n = 3$ , l'affichage est  $[11,21]$ .  
 (b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

valeur de $n$	0	1	2	3	4	5
Affichage de $u$				11		
Affichage de $S$				21		

### 2. Partie B

Soit  $(u_n)$  et  $(S_n)$  les suites définies sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- (a) Pour  $n$  donné, que représente les valeurs affichées par l'algorithme de la partie A ?  
 (b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Quelle conjecture peut-on faire à partir de ces résultats ?

$n$	0	1	2	3	4	5
$u_n$						
$u_n - n$						

- (c) Démontrer la conjecture.  
 (d) En déduire l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$  et vérifier le résultat obtenu dans la partie A pour  $n = 5$ .

## ★ Exercice 22

### Partie A

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ .

1. Démontrer que, la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $a$ .
2. En déduire que si  $a$  appartient à l'intervalle  $] -1 ; 1[$ , alors la suite  $(u_n)$  a pour limite  $\frac{b}{1-a}$ .

### Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $h_n$  la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année  $(2015 + n)$ .
  - (a) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$ .
  - (b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite  $(h_n)$ .  
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
  - (c) La suite  $(h_n)$  est-elle convergente ? Justifier la réponse.