Suites, démonstration par récurrence et calcul de limites

I Rappel

1 Généralités

Vous avez vu l'année dernière deux manières de définir une suite numérique, de manière explicite ou par récurrence.

- Suite définie de manière explicite :
  soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $u_n = 3n^2 + 2n - 1$.
  On peut aussi écrire $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
- Suite définie par récurrence :
  soit $(v_n)_n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 + 1$.
  On peut aussi écrire $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 1$

Danger

Soit f est une fonction définie sur l'ensemble des réels.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ avec la donnée d'un premier terme v_0
Ces suites n'ont aucune raison d'être les mêmes malgré qu'elles soient définies à l'aide de la même fonction f, l'une étant définie de manière explicite et l'autre par récurrence.
Les méthodes à appliquer pour connaître les variations de ces deux suites pourront être différentes.

Définitions

- suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) si et seulement si pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} \geqslant u_n \quad (\text{ respectivement } u_{n+1} > u_n)$$

- suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) si et seulement si pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} \leqslant u_n \quad (\text{ respectivement } u_{n+1} < u_n)$$

Propriétés

- suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (respectivement **décroissante**) si et seulement si pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (respectivement $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$).
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite **à terme strictement positifs** définie sur $\mathbb{N}$.
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (respectivement **décroissante**) si et seulement si pour tout entiers naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ $\left(\text{respectivement} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1\right)$.
- soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie de **manière explicite** par $u_n = f(n)$.
  Si f est croissante sur $[0;+\infty[$ (respectivement f est décroissante sur $[0;+\infty[$), alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** (respectivement **décroissante**).

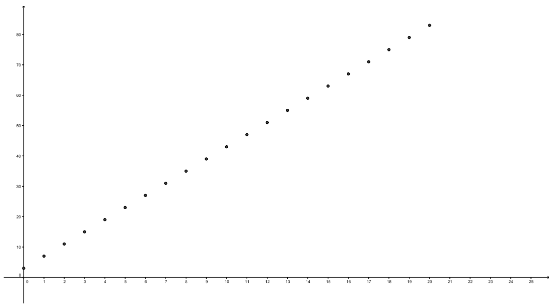
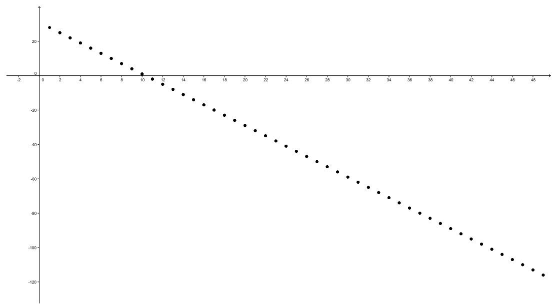
Remarques

- La réciproque de la propriété 3 est fausse. Par exemple, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ est croissante bien que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto x + \sin\left(x \times \frac{\pi}{2}\right)$ ne soit pas croissante.
- Pour étudier les variations d'une suite, on pourra aussi être amené à faire une démonstration par récurrence.

2 Suites arithmétiques

Définition

Soit $i \in \mathbb{N}$
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_i et de raison $r \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq i$ on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Dans ce cas, on a pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq i, p \geq i$ on a $u_n = u_p + (n-p) \times r$.
Cas particulier avec $p = 0$: $u_n = u_0 + n \times r$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^2+4n+3}{n+3}$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 2.

Correction

On peut tout d'abord remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+3>0$ et par conséquent u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

> L'objectif est de retrouver la définition d'une suite arithmétique, c'est à dire de montrer que $u_{n+1}-u_n$ est constant et donc ne dépend pas de n.
> Soit l'on peut essayer de calculer directement $u_{n+1}-u_n$, soit l'on peut essayer de simplifier l'expression de u_n, C'est la seconde méthode qui est utilisé dans la correction. On va donc essayé de factoriser le numérateur de u_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On remarque que -1 est une racine n^2+4n+3 car $(-1)^2+4\times(-1)+3=0$ et par conséquent n^2+4n+3 est factorisable par $n-(-1)$, c'est à dire par $n+1$.
d'où $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$
Donc $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{n+3} = n+1$.
On a alors :
$u_{n+1}-u_n = n+1+1-(n+1) = 1$
La suite (u_n) est donc bien une suite arithmétique de raison est 1 et de premier terme $u_1 = 1+1 = 2$.

Propriété

Somme des n premiers termes

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \geq p \geq i$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_n + u_p)(n-p+1)}{2}$$

Autrement dit : La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suites arithmétiques est donnée par :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier termes}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

Exemples

- suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_k = k$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$, donc, en utilisant la formule du cours on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Soit $(u_k)_{\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 5$, d'où :

$$u_{10} = 5 + (10-1) \times 3 = 32 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{10} u_k = \frac{(5+32) \times 10}{2} = 185$$

3 Suites géométriques

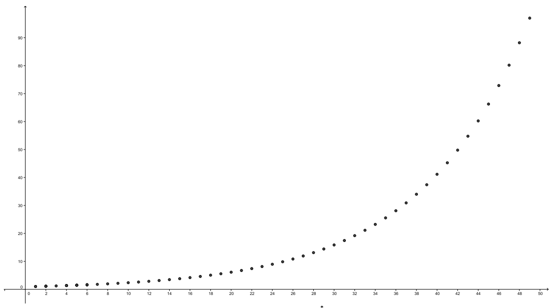
Définition

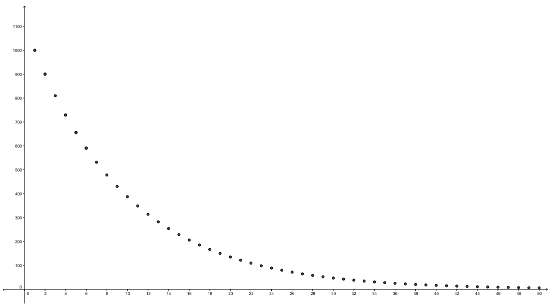
Soit $i \in \mathbb{N}$

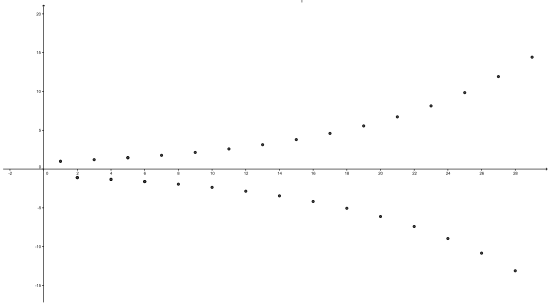
(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_i et de raison $q \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq i$ on a $u_{n+1} = q \times u_n$.

Dans ce cas, on a pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq i, p \geq i$ on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Cas particulier si $p = 0$: $u_n = u_0 \times q^n$.







Propriété

Somme des n premiers termes

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \geq p \geq i$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Autrement dit : La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suites géométrique est donnée par :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Exemples

- suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_k = 2^k$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$, donc, en utilisant la formule du cours on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$$

- Soit $(u_k)_{\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = 5$, d'où :

$$u_{10} = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{10} u_k = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 10 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$$

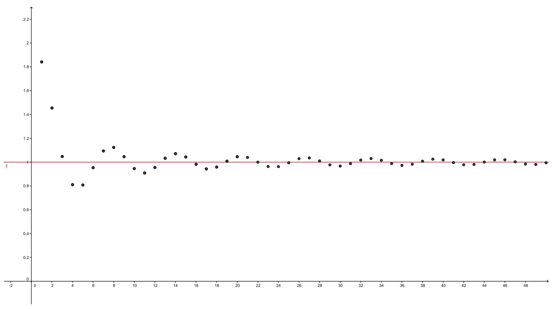
II Limites d'une suite

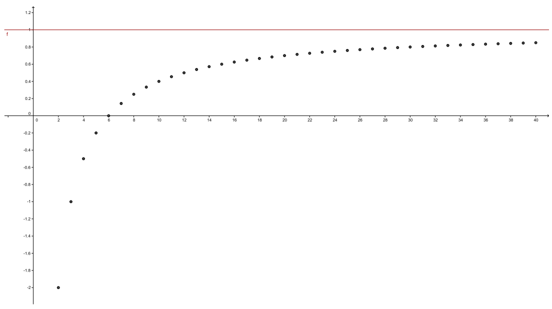
1 Limite finie en $+\infty$

Définition

Soit L un réel et (u_n) une suite définie à partir d'un certain rang i.
On dit que la suite (u_n) a pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$





Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2 + \frac{1}{n}$$

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Correction

On peut tout d'abord remarquer que $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n \neq 0$ et par conséquent u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Une conjecture graphique faite à l'aide de la calculatrice nous permet de penser que la suite est convergente et a pour limite 2.
On va donc prendre un intervalle ouvert quelconque contenant 2. On pourrait choisir l'intervalle $]2-a;2+b[$ ou a et b sont deux réels strictement positifs, mais par souci de simplification, prendra comme intervalle $]2-e;2+e[$ où $e = \min\{a,b\}$. Un tel intervalle suffit pour la démonstration car $]2-e;2+e[\cap]2-a;2+b[$.
L'objectif est donc de montrer cet intervalle $]2-e;2+e[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, c'est à dire qu'il **existe** un rang N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in]2-e;2+e[$, c'est à dire $2-e < u_n < 2+e$.

Soit $e \in]0;+\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 < 2 + \dfrac{1}{n}$, donc $2 < u_n$ et par conséquent $2 - e < u_n$.
D'autre part, avec N le plus petit entier supérieur ou égale à $\dfrac{1}{e}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n > N &\Rightarrow n > \frac{1}{e} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} < e \quad \text{(Car la fonction inverse est strictement décroissante sur }]0;+\infty[) \\ &\Rightarrow 2 + \frac{1}{n} < 2 + e \\ &\Rightarrow u_n < 2 + e \end{aligned}$$

Donc pour tout $e \in]0;+\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N$ alors $u_n \in]2-e;2+e[$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

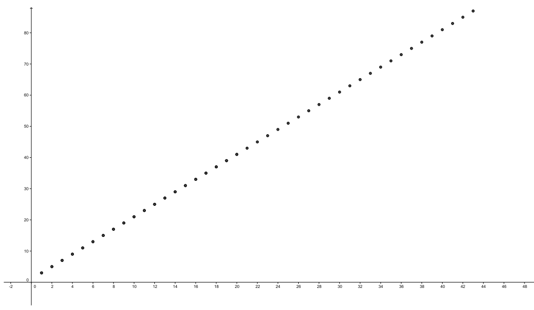
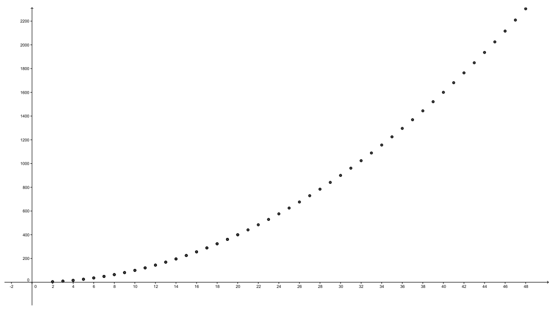
2 Limite infinie en $+\infty$

Définition

Soit A un réel.
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n}$$

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Correction

On peut facilement conjecturer graphiquement que la suite est divergente et a pour limite $+\infty$.
On va donc prendre un intervalle ouvert quelconque de la forme $]A; +\infty[$ ou A est un réel quelconque.
L'objectif est donc de montrer que cet intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, c'est à dire qu'il **existe** un rang N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in]A; +\infty[$, c'est à dire $A < u_n$.

Soit $A \in]0; +\infty[$ et N le plus petit entier strictement supérieur à A^2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > N$, on a :

$$\begin{aligned} n > N &\Rightarrow n > A^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{n} > \sqrt{A^2} \quad \text{(Car la fonction racine carré est strictement croissante sur }]0; +\infty[) \\ &\Rightarrow u_n > A \quad (\text{car } A \geqslant 0 \text{ donc } \sqrt{A^2} = A) \end{aligned}$$

Donc pour tout $A \in]0; +\infty[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n > N$ alors $u_n > A$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

Définition

Soit A un réel.
On dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\sqrt{n}$$

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Danger

- Il existe des suites qui n'ont pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$
- Il existe des suites qui tendent vers $+\infty$ et qui pourtant ne sont pas croissante, par exemple $v_n = n + (-1)^n$

3 Limite des suites de références

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{pour tout entier } k \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{n \to +\infty} n^k = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

III Opérations sur les limites

Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites et m et n deux réels.

1 Limite de la somme de deux suites

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$	m	m	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} v_k$	n	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k + v_k$	$m+n$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?

2 Limite du produit de deux suites

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$	m	$m > 0$ ou $+\infty$	$m < 0$ ou $-\infty$	$m > 0$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} v_k$	n	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} (u_k \times v_k)$	$m \times n$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$	$m < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{k\to+\infty} v_k$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} (u_k \times v_k)$	$+\infty$	? ?

3 Limite du quotient de deux suites

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$	m	m	0	$m > 0$ ou $+\infty$	$m > 0$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} v_k$	$n \neq 0$	$+\infty$ou$-\infty$	0	0 avec $v > 0$	0 avec $v < 0$
$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{v_k}$	$\dfrac{m}{n}$	0	? ?	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} v_k$	$n \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{v_k}$	$+\infty$ si $n > 0$ et $-\infty$ si $n < 0$	? ?

IV Propriétés sur les limites de suites

Théorème - Unicité (admis)

Si une suite (u_n) a pour limite un réel l, alors cette limite est unique.

la démonstration est hors programme, mais vous pourriez la faire par l'absurde et en supposant qu'une suite (u_n) a deux limites distinctes l_1 et l_2.

Définitions

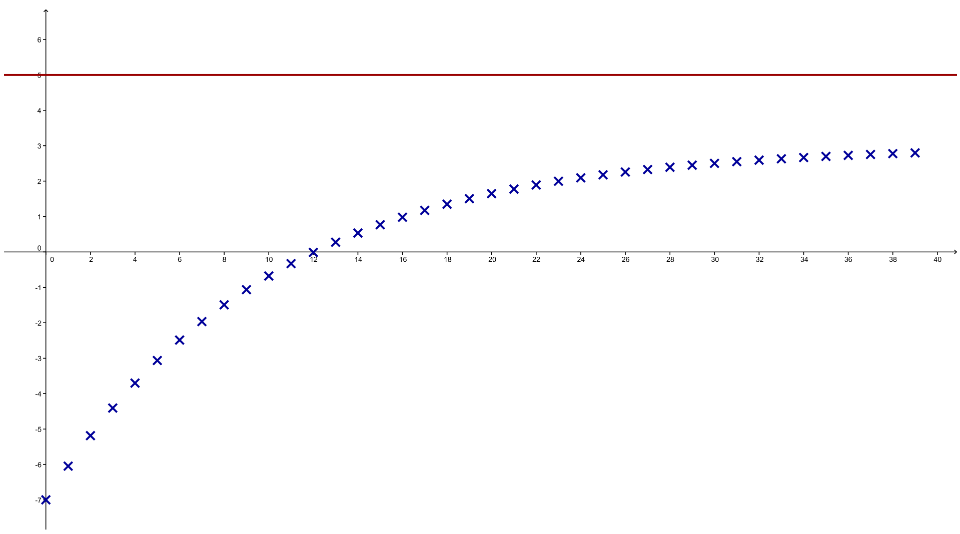
- Une suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$ est **majorée** par un réel M si pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant M$. Dans ce cas, on dit que M est un majorant de la suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$.
- Une suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$ est **minorée** par un réel m si pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant m$. Dans ce cas, on dit que m est un minorant de la suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$.
- Une suite est bornée si elle a un majorant et un minorant.

Exemple

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos(n)$ est minorée par -1, mais aussi par -3 ou -5 et est majorée par 1, mais aussi par 24 ou 32.
Comme elle est minorée et majorée, elle est bornée.

Théorèmes de convergence monotone (admis)

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.



Exemple

Ces deux théorèmes permettent de démontrer la convergence d'une suite, mais pas de déterminer sa limite. Dans certaine question, on demande simplement de démontrer la convergence d'une suite alors que le calcul de la limite est demandé dans les questions qui suivent. Ce sera certainement un des théorèmes de convergence monotone qu'il faudra utiliser.

Théorèmes

- Toute suite **croissante** et **non majorée** diverge vers $+\infty$.
- Toute suite **décroissante** et **non minorée** diverge vers $-\infty$.

démonstration

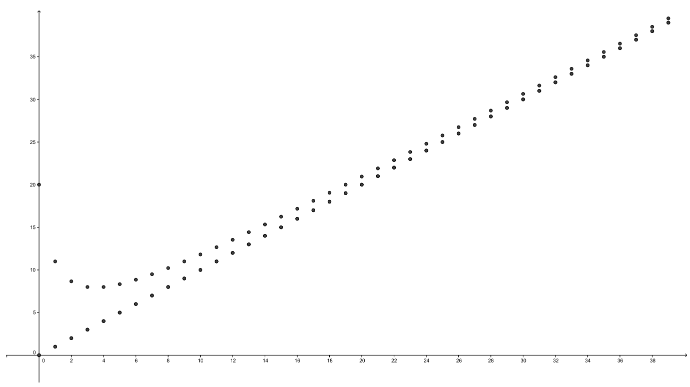
démontrons que Toute suite **croissante** et **non majorée** diverge vers $+\infty$.
Soit $(u_n)n \in \mathbb{N}$ une suite croissante et non majorée.
Pour démontrer que sa limite est $+\infty$, on va utiliser la définition, c'est à dire que tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tout les termes de la suite a partir d'un certain rang.
Soit A un réel.
Comme la suite n'est pas majorée, il existe un rang i tel que $u_i > A$.
De plus, (u_n) est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant i$, alors $u_n \geqslant u_i > A$, d'où $u_n \in]A; +\infty[$

Propriété - relation d'ordre

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang i, on a $u_n \leq v_n$ et que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$$

.



démonstration

Encore une fois, pour cette démonstration, on utilise la définition d'une limite infinie.
Soit A un réel.
D'après les hypothèses du théorème, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ donc tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $]A;+\infty[$ a partir d'un certain rang k.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant k$, d'où $A < u_n$.
D'autre part, à partir d'un certain rang i, on a $u_n \leq v_n$.
On pose $p = \max\{i,k\}$ le plus grand des deux entiers i et k et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel $n \geqslant p$ on a $A < u_n \leqslant v_n$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty}$

Exemple

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + (-1)^n$ diverge vers $+\infty$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$
On a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $3n - 1 \leqslant 3n + (-1)^n$ ou encore $3n - 1 \leqslant u_n$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n + 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$

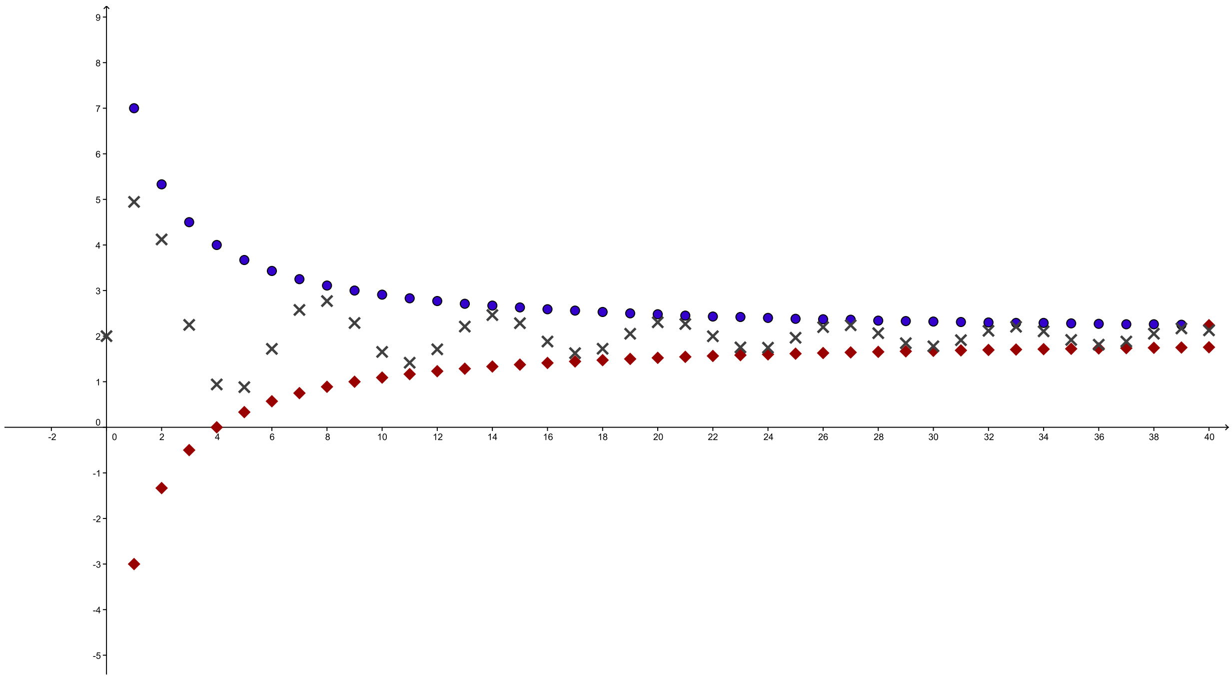
Théorème des gendarmes (admis)

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = a$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = a$$



Exemple

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\sin(n)}{n}$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$

$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

$$1+\frac{-1}{n} \leqslant 1+\frac{\sin(n)}{n} \leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

or ...

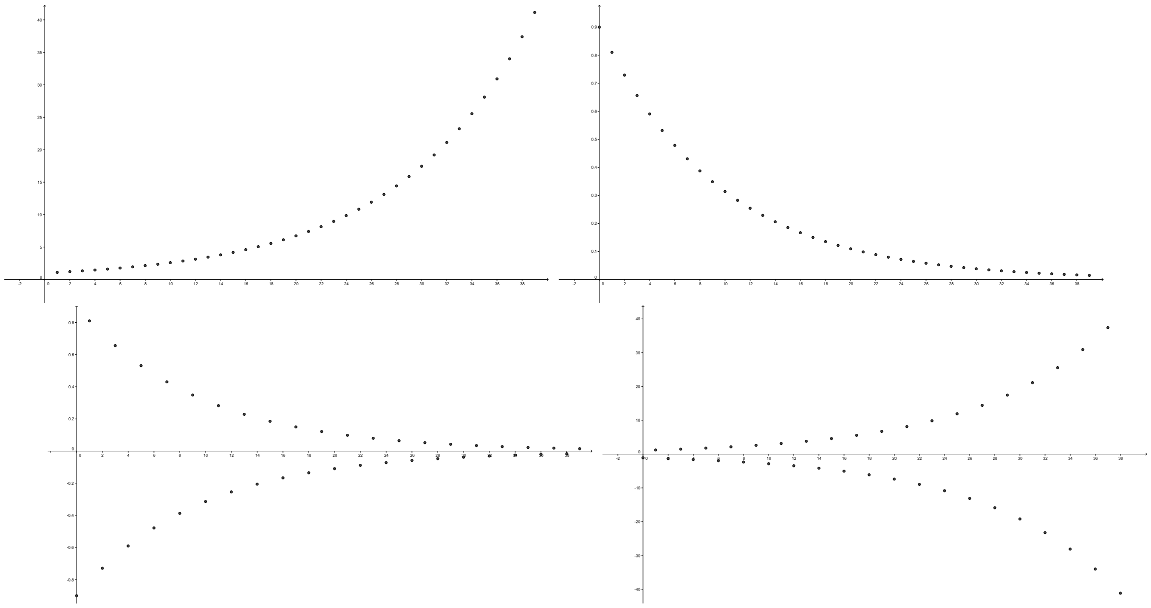
V Limite des suites géométriques

1 La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Propriétés

Soit q un réel et n un entier naturel.

1. Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$. La suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante.
3. Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
4. Si $q \leq -1$ alors $(q^n)_{n\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.



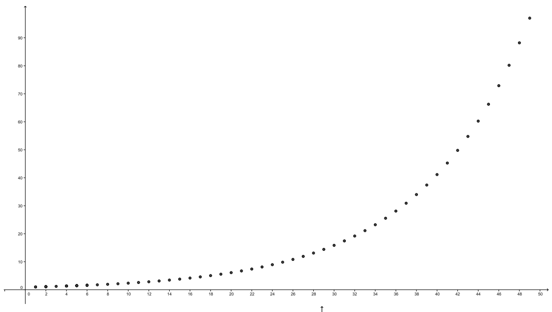
Démonstration 1. ...

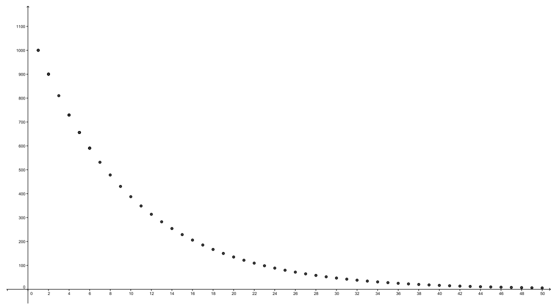
2 Généralisation

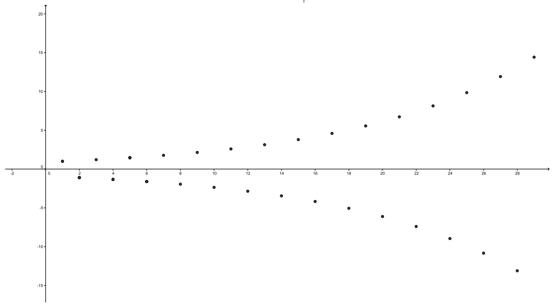
Généralisation

Soit $i \in \mathbb{N}$ et (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_i.

- si $q > 1$ et $u_i > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- si $q > 1$ et $u_i < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- si $q = 1$, alors pour tout $n > i, u_n = u_i$. (u_n) est alors une suite constante.
- si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- si $q \leq -1$ alors (u_n) n'a pas de limite.







VI Suites du type $u_n = f(n)$

Pour étudier ce type de suite, on peut étudier la fonction f. Si f est croissante, la suite (u_n) sera croissante et si f est décroissante, la suite (u_n) sera décroissante. De plus si f admet une limite en $+\infty$, alors (u_n) aura la même limite.

VII Suites définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Danger

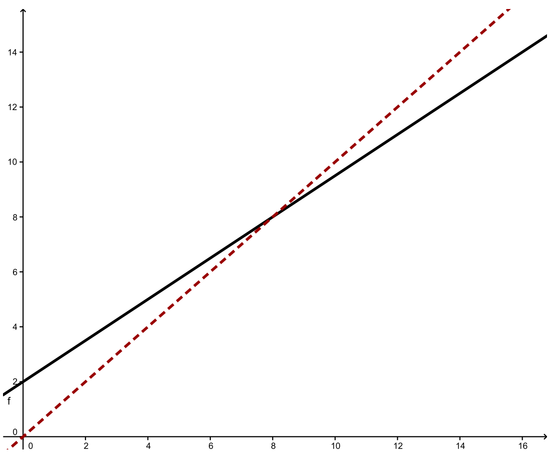
L'étude des variations de ce type de suite **ne peut pas** être simplement le déduit de l'étude des variations de la fonction f associée.
Il pourra être complété par une démonstration par récurrence.
Si f est une fonction **croissante**, $u_{n+1} - u_n$ sera du même signe que $u_1 - u_0$. La suite sera donc croissante si $u_1 - u_0 > 0$ et décroissante si $u_1 - u_0 < 0$.
On ne dispose d'aucune propriété dans cette partie, il faudra donc faire une étude particulière à chaque fois que se présentera ce type de suite.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

- $u_0 = 16$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}x + 2$

1. Calculer u_1.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < u_n$.
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.



Correction

1. $u_1 = f(u_0) = \dfrac{3}{4} \times 16 + 2 = 14$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \dfrac{3}{4} > 0$.
   f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: $0 < u_{n+1} < u_n$ est vraie.
   - **Initialisation** $u_1 = 14$ et $u_0 = 16$, donc $u_1 < u_0$.
     La proposition est donc vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_{n+1} < u_n$, On a alors :

     $$\begin{array}{rcccl} 0 & < & u_{n+1} & < & u_n \\ f(0) & < & f(u_{n+1}) & < & f(u_n) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ 2 & < & u_{n+2} & < & u_{n+1} \end{array}$$

     D'où $0 < u_{n+2} < u_{n+1}$
     La proposition $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.
   - **Conclusion** $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire que $0 < u_{n_0+1} < u_{n_0}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc **décroissante**.

4. (u_n) étant une suite décroissante et minorée, elle est convergente. Soit l sa limite.
   L'unicité de la limite donne $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = l$ d'une part et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \dfrac{3}{4}l + 2$ d'autre part.

   $$\frac{3}{4}l + 2 = l \Leftrightarrow \frac{3}{4}l - l = -2 \Leftrightarrow (\frac{3}{4} - 1)l = -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}l = -2 \Leftrightarrow l = 8$$

   Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 8$.