Dénombrement

Programme

Contenu :

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.
- Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de $\{0, 1\}$, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.
- Nombre des k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, formules : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.
- Explicitation pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

Capacités attendues :

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

Démonstrations :

- Démonstration par dénombrement de la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$.
- Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul, par une méthode combinatoire).

Algorithme :

- Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ à l'aide de la relation de Pascal.
- Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation.
- Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini.