Dénombrement

I Cardinal et Principe additif

1 Cardinal

Définition

Soit E un ensemble fini, (c'est à dire ayant un nombre fini d'éléments).
On appelle cardinal de E, noté $\text{card}(E)$ le nombre d'élément de E

Exemples

- Si A est l'ensemble des élèves de la classe, $\text{card}(A)$ est le nombre d'élève de cette classe.
- Soit $E = \{a, b, c, 1, 2, t, 5\}$, alors $\text{card}(E) = 7$
- $\text{card}(\emptyset) = 0$

2 Principe additif

Propriété (admise)

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n ensembles finis deux à deux disjoints.
(c'est à dire : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ A_i \cap A_j = \emptyset$).

$$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + ... + \text{card}(A_n)$$

Exemple

Soit un groupe composé de 4 chèvres, 12 blaireaux et 7 ânes.
il y a donc $4 + 12 + 7 = 23$ éléments dans ce groupe.
En effet, en appelant A_1 le groupe des chèvres, A_2 le groupe de blaireaux et A_3 le groupe de ânes, on a bien :
$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ et $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, donc ces trois ensembles sont disjoints deux à deux

et par conséquent le nombre total d'éléments dans le groupe est :
$\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \text{card}(A_3) = 4 + 12 + 7 = 23$

Remarque

Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ son complémentaire.

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

Propriété

Soient A et B deux ensembles, on a :
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Exemple

Dans une classe de terminale, tous les élèves ont pris soit la spécialité mathématiques, soit la spécialité économie ou éventuellement les deux. Il y a 17 élèves en spécialité maths, 18 en spé économie et 6 élèves ont choisi les deux spécialités.
Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ? Il y a $17 + 18 - 6 = 29$ dans la classe.
En effet, en appelant A le groupe des élèves en spécialité maths, et B celui des élèves en spécialité économie, on a :
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 17 + 18 - 6 = 29$

démonstration

Soient A et B deux ensembles
$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, donc :
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A)$
D'autre part, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ avec $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, d'où :
$\text{card}(B) = \text{card}(B \setminus A) + \text{card}(A \cap B)$ et par conséquent
$\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
On obtient donc :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

II principe multiplicatif et k-uplet

1 principe multiplicatif

Définition

Soient E et F deux ensembles.
Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x;y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple

Soient $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{a,b\}$ deux ensembles.
$(2;a)$ est un éléments de $E \times F$ et :
$E \times F = \{(1;a);(1;b);(2;a);(2;b);(3;a);(3;b)\}$

Remarque

Si A ou B est l'ensemble vide, alors $A \times B$ est aussi l'ensemble vide.

Propriété

Soient E et F deux ensembles finis.

$$\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$$

Exemple

Soient $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{a,b\}$ deux ensembles.
$\mathrm{card}(E) = 3$ et $\mathrm{card}(F) = 2$ donc $\mathrm{card}(E \times F) = 3 \times 2 = 6$.
En effet, $E \times F = \{(1;a);(1;b);(2;a);(2;b);(3;a);(3;b)\}$ a bien 6 éléments.

démonstration

Soient $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et $F = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ deux ensembles finis non vide de cardinal respectifs n et m.
Soient $i \in [\![1;m]\!]$ et $E_i = E \times \{b_i\} = \{(a_1, b_i);(a_2;b_i);...;(a_n;b_i)\}$
On a donc $\mathrm{card}(E_i) = n$ et pour tout couple $(i;j) \in [\![1;m]\!]$ tel que $i \neq j$, on a $E_i \cap E_j = \emptyset$, donc d'après la propriété d'additivité, on a :

$$\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_m) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{card}(E_i) = \sum_{i=1}^{m} n = mn$$

d'autre part, si E ou F est l'ensemble vide, alors $E\times F$ est aussi l'ensemble vide et par conséquent

$$\text{card}(E\times F)=\text{card}(E)\times\text{card}(F)=0$$

Danger

Le signe $\times$ dans $E\times F$ est le produit cartésien. Le résultat est donc un ensemble de couple alors que le signe $\times$ dans $\text{card}(E)\times\text{card}(F)$ représente la multiplication dans l'ensemble des entiers naturels et le résultat est un entier naturel.

2 k-uplet

Définition

Soient $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et $E_1, E_2, ..., E_k$, k ensembles non vides.
Le produit cartésien $E_1\times E_2\times ...\times E_k$ est l'ensemble des listes ordonnées $(x_1, x_2, ..., x_k)$ où $\forall i\in[\![1,k]\!],\ x_i\in E_i$.
Chaque élément de ce produit cartésien est appelé k-uplet.

Propriété

Soient $k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et $E_1, E_2, ..., E_k$, k ensembles finis et non vides.

$$\text{card}(E_1\times E_2\times ...\times E_k)=\text{card}(E_1)\times\text{card}(E_2)\times ...\times\text{card}(E_k)$$

démonstration

C'est une démonstration que l'on peut faire par récurrence sachant que

$$E_1\times E_2\times ...\times E_k=(E_1\times E_2\times ...\times E_{k-1})\times E_k$$

Remarque

- Un 2-uplet est appelé un couple
- Un 3-uplet est appelé un triplet.

3 k-uplet d'un ensemble E^k

Définition

Soient E un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul.
On appelle **k-uplet d'éléments de** E tout élément du produit cartésien :

$$E^k = E \times E \times ... \times E \quad (k \text{ facteurs})$$

Exemple

$(4, 1, 1, 2, 4)$ est un 5-uplet d'élément de $E = \{1; 2; 3; 4\}$, c'est à dire que c'est un élément de E^5.
D'autre part, $(4; 1; 1; 2; 4)$ est un 5-uplet différent de $(1; 1; 2; 4; 4)$, c'est à dire que l'ordre des éléments de E compte.

Propriété

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel non nul.

$$\text{card}(E^k) = \text{card}(E)^k = n^k$$

Exemple

Avec $E = \{1; 2; 3; 4\}$ on a $\text{card}(E^5) = \text{card}(E)^5 = 4^5$

démonstration

$$\text{card}(E^n) = \text{card}(E \times E \times ... \times E) = \text{card}(E) \times \text{card}(E) \times ... \times \text{card}(E) = \text{card}(E)^5$$

4 k-uplet d'elements distincts de E et permutation

Définition

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
On appelle arrangement à k-éléments de E (ou k-arrangement) tout k-uplet d'éléments **distincts** de E

Exemple

- $(1;2;3;5)$ est un arrangement à 4 éléments de $E = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ et $(2;3;5;1)$ en est un autre.
- $(1;1;3;4)$ n'est pas un arrangement car il contient deux fois l'élément 1, c'est simplement un 4-uplet d'éléments de E.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On appelle factoriel de n l'entier naturel défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

Exemple

- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- $\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 = 30$

Propriété

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n.
Le nombre d'arrangement à k éléments de E (c'est à dire le nombre de k-uplet d'éléments distincts de E) est :

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

démonstration

Pour construire un arrangement à k éléments de E, on a n choix pour le premier élément, $(n-1)$ pour le second, $(n-2)$ pour le troisième et ainsi de suite jusqu'à $(n-k+1)$ pour le k^{ieme} élément, d'où le nombre de possibilité suivant :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Définition

Soient E un ensemble fini non vide de cardinal n
On appelle permutation de E tout n-arrangement d'éléments de E, c'est à dire tout n-uplet d'éléments distinct de E.

Exemple

$(1; 2; 3; 4)$ est une permutation de $E = \{1; 2; 3; 4\}$ au même titre que $(4; 3; 1; 2)$ ou encore $(1; 2; 4; 3)$

Propriété (admise)

Le nombre de permutation d'un ensemble de cardinal non nul n est $n!$

III Partie d'un ensemble et combinaisons

1 Partie d'un ensemble fini et combinaison

Définition

- On appelle partie d'un ensemble fini A tout sous ensemble de A.
- Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k.
- Le nombre de combinaison de k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$

Exemple

Dans la classe, l'ensemble des élèves ayant des lunettes est une partie de la classe et en supposant qu'ils soient 15, alors dasn ce cas, c'est aussi une combinaison de 15 éléments de la classe.

Propriété

Le nombre de partie d'un ensemble A de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est 2^n

démonstration

Soit A un ensemble de cardinal n.
Pour constitué une partie de A, il existe deux choix pour chaque éléments de A : l'incorporer dans cette partie ou non.
Chaque partie de A peut donc être associé de manière unique à un éléments de $\{0;1\}^n$
Le nombre de partie de A est par conséquent égale au cardinal de $\{0;1\}^n$, or $\operatorname{card}(\{0;1\}^n) = \operatorname{card}(\{0;1\})^n = 2^n$
Donc le nombre de partie de A est 2^n

Propriété

Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$, on a :

1. $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
2. $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
3. **Relation de Pascale** : si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k}$

démonstration

Soit E un ensemble non vide de cardinal n et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. Le nombre de permutation d'un ensemble composé de k éléments étant $k!$, pour chaque combinaison $C_k = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ de k éléments de E, il existe $k!$ k-arrangements d'éléments de C_k. D'autre part, chaque k-arrangement peut être associé à une unique combinaison à k éléments de E, donc le nombre de k-arrangement est $k!$ fois supérieur au nombre de combinaison, c'est à dire :
$\dfrac{n!}{(n-k)!} = k!\dbinom{n}{k}$ et par conséquent :
$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
2. A chaque partie de k éléments de E on peut associer de manière unique son complémentaire qui lui aura $n-k$ éléments. Donc le nombre de combinaison à k éléments de E est égale au nombre de combinaison à $(n-k)$ éléments de E. C'est à dire :
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

3.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

démonstration

Soit E un ensemble non vide de cardinal n Le nombre de partie totale de E est égale à la somme des nombres de partie à k éléments de E pour k allant de 0 à n, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$