Produit scalaire et Orthogonalité et distance dans l'espace

I Produit scalaire de l'espace

1 Rappel : Le produit scalaire dans le plan

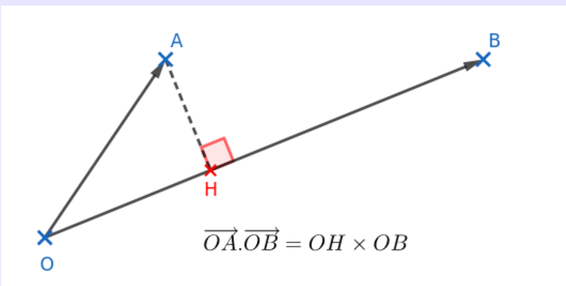
Définition

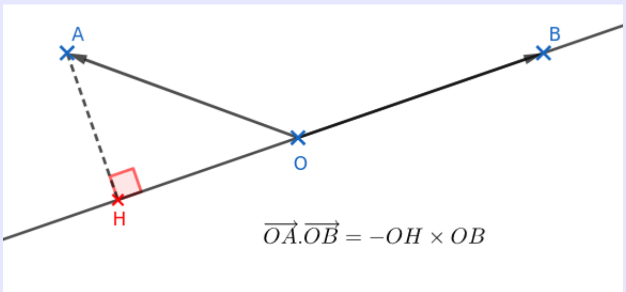
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nul du plan.
Soit O un point du plan et A et B deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (OB)
Le produit scalaire de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le **réel** défini par :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OH \times OB$ si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont dans le même sens.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OH \times OB$ si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas dans le même sens.

D'autre part, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.\overrightarrow{u} = 0$$





Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

On a alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$$

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On a alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}^2\|\right)$$

Propriété

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère **orthonormé** Soit $\overrightarrow{u}\,(x, y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x', y')$ deux vecteurs du plan.
On a alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Cette dernière propriété est la plus simple à utiliser, mais elle nécessite d'avoir un repère orthonormé ainsi que les coordonnées des vecteurs dans ce repère.

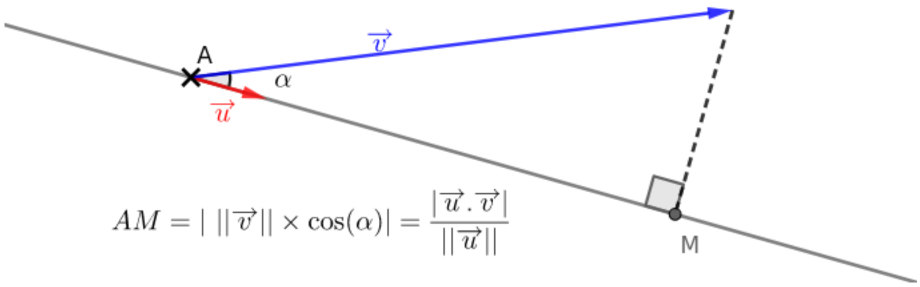
Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel.
On a alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
3. $\overrightarrow{u}.\left(k\overrightarrow{v}\right) = k\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)$



Remarques

- Si $\alpha \in [0;90]$ alors $AM = \dfrac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||}$
- Si $\alpha \in [90;180]$ alors $AM = -\dfrac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}||}$
- Si $||\overrightarrow{u}|| = 1$ alors $AM = |\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}|$
- Si $||\overrightarrow{u}|| = 1$ et $\alpha \in [0;90]$ alors $AM = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
- Si $||\overrightarrow{u}|| = 1$ et $\alpha \in [90;180]$ alors $AM = -\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

2 Produit scalaire dans l'espace

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CB}$.
Il existe au moins un plan (P) contenant A, B et C.
On défini le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme étant le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans le plan (P).

On retrouve donc les propriétés suivantes :

Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}^2\|\right)$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
- Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

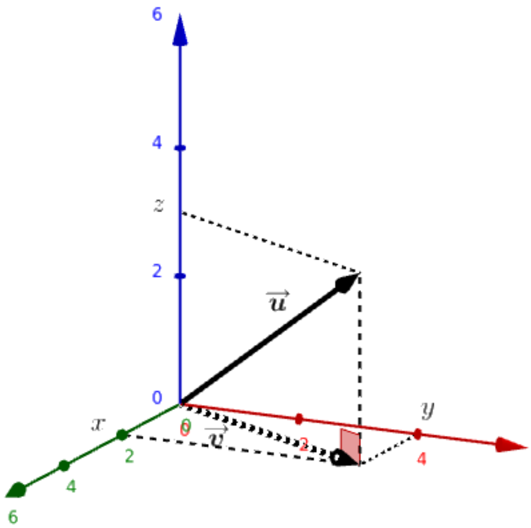
Propriété

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère **orthonormé** de l'espace Soit $\overrightarrow{u}\,(x, y, z)$ un vecteurs de l'espace.
On a alors :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La figure ci-dessous illustre ce résultat qui peut être démontré à l'aide du théorème de Pythagore.

Dans le plan orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on a $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc $||\vec{v}||^2 = x^2 + y^2$
De plus, sur la figure ci-contre, le vecteur $\vec{v}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur le plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ donc d'après le théorème de Pythagore, $||\vec{u}||^2 = ||\vec{u}||^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$.



Propriété

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère **orthonormé** Soit $\vec{u}\,(x,y,z)$ et $\vec{v}\,(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace.
On a alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

En effet :
On a $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}^2\|\right)$
or $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé et :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u+v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

donc :
$||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$
$||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$
$||\overrightarrow{u+v}||^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2$
d'où :

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}^2\|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - (x^2+y^2+z^2) - (x'^2+y'^2+z'^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 + z^2 + 2zz' + z'^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy' + 2zz')$$
$$= xx' + yy' + zz'$$

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.
On a alors :

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$

Pour démontrer cette dernière propriété, on se place dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ avec :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_v + x_w \\ y_v + y_w \\ z_v + z_w \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) &= x_u(x_v + x_w) + y_u(y_v + y_w) + z_u(z_v + z_w) \\
&= x_ux_v + x_ux_w + y_uy_v + y_uy_w + z_uz_v + z_uz_w \\
&= x_ux_v + y_uy_v + z_uz_v + x_ux_w + y_uy_w + z_uz_w \\
&= \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} \\
&= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}
\end{aligned}$$

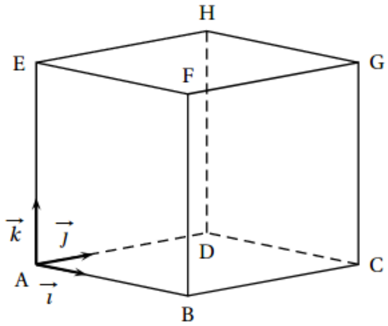
3 Orthogonalité dans l'espace

Définition

On dit que deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Danger

Deux droites peuvent être orthogonales sans être sécantes, deux droites sécantes étant deux droites ayant un unique point en commun. En effet, dans le cube ci-dessous, le droites (AB) et (GC) sont orthogonales mais ne sont pas sécantes. Elles ne sont donc pas perpendiculaires.



Définition

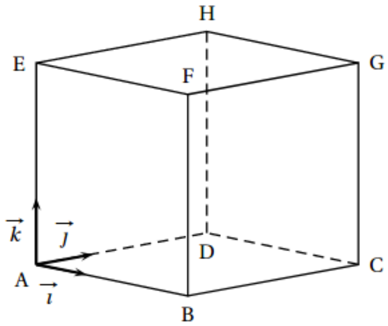
Soit $\mathcal{P}$ un plan et $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs directeur de $\mathcal{P}$.
On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ **non nul** est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ si il est **orthogonal** à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, c'est à dire si :

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n}.\vec{v} = 0$$

.

Exemple

Dans le cube ci-dessous, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal du plan $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ car il est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$

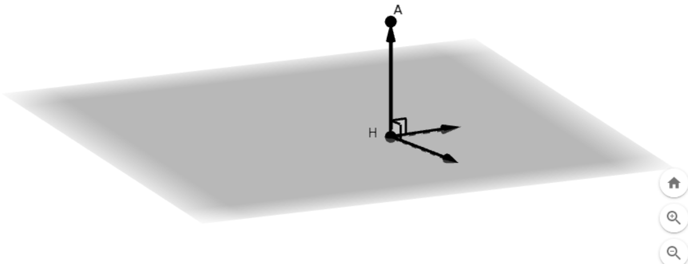


Définition

On dit que la droite D de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$ si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Exemple

En utilisant le cube de la figure précédente, la droite (EF) est orthogonale au plan (ADE).
De même, dans la figure ci-dessous, la droite (AH) est orthogonal au plan grisé.

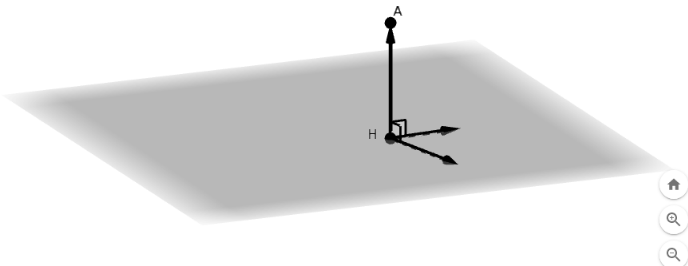


Définition

1. Soient (d) une droite et A un point de l'espace.
   Il existe un unique point H de (d) tel que la droite (AH) est orthogonal à (d). Ce point H est appelé projeté orthogonal de A sur (d)
2. Soient $\mathcal{P}$ un plan et A un point de l'espace.
   Il existe un unique point H de $\mathcal{P}$ tel que la droite (AH) est orthogonal à $\mathcal{P}$. Ce point H est appelé projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessous, H est le projeté orthogonal de sur A sur le plan grisé



Définition

La distance d'un point A à un plan $\mathcal{P}$ est la plus petite des distances de A aux points de $\mathcal{P}$.
Elle est donné par la distance AH, où A est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Exemple

Dans la figure de l'exemple précédent, la distance de A au plan grisé est la distance AH, c'est à dire la longueur du segment $[AH]$

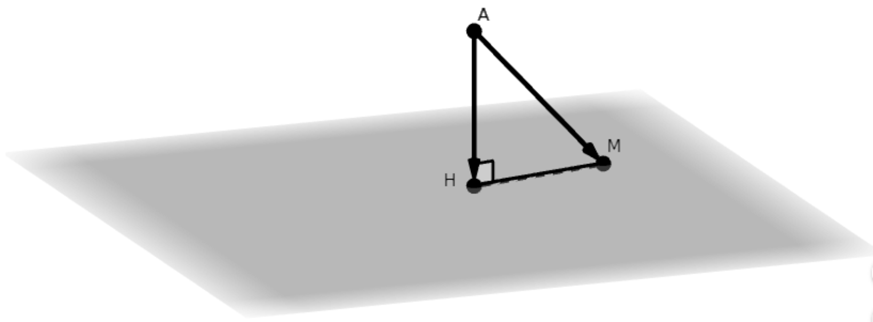
Propriété

Soient $\mathcal{P}$ un plan, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et A un point de l'espace.
La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est la distance AH, H étant le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, et on a :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

où M est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$

démonstration



H étant le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$ et M étant un point de $\mathcal{P}$, on a $(AH) \perp (HM)$.
Donc H est aussi le projeté orthogonal de M sur la droite (AH), d'où :
$|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}| = AH \times \|\overrightarrow{n}\|$
Donc :

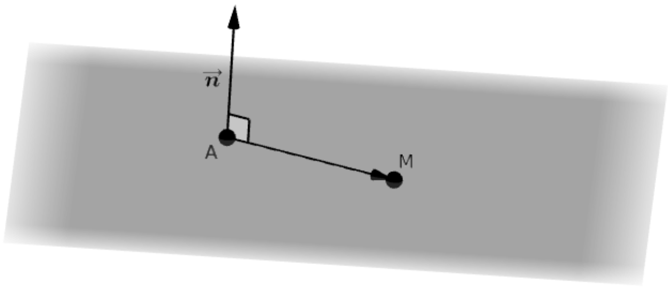
$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

4 Equation cartésienne d'un plan

Propriété

propriété caractéristique d'un plan.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

> Un point M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$



En effet :
Soient $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

- Soit M un point de $\mathcal{P}$.
  $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc coplanaires et par conséquent il existe deux réels α et β tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.
  d'où :
  $$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} &= (\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}).\overrightarrow{n} \\ &= \alpha\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} + \beta\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \quad \text{car } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{P} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Réciproquement**
  Soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$
  $\overrightarrow{n}$ étant le vecteur normal de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc trois vecteurs non coplanaires et par conséquent il existe trois réel α, β et γ tels que :
  $$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{n}$$
  or :
  $$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 &\Rightarrow (\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{n}).\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} + \beta\overrightarrow{v}\overrightarrow{n} + \gamma\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Rightarrow 0 + 0 + \gamma\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Rightarrow \gamma||\overrightarrow{n}||^2 = 0 \\ &\Rightarrow \gamma = 0 \qquad\qquad \text{Car } ||\overrightarrow{n}|| \neq 0 \end{aligned}$$
  Donc $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ et par conséquent, $M \in \mathcal{P}$

Propriété

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifie l'équation :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad d = -ax_A - by_A - cz_A$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$

démonstration

En effet on a, avec les données de la propriété :

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$
$\Leftrightarrow (x - x_A).a + (y - y_A).b + (z - z_A).c = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

Danger

Une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ n'est pas unique. En effet, si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, alors $2ax + 2by + 2cz + 2d = 0$ en est une autre.