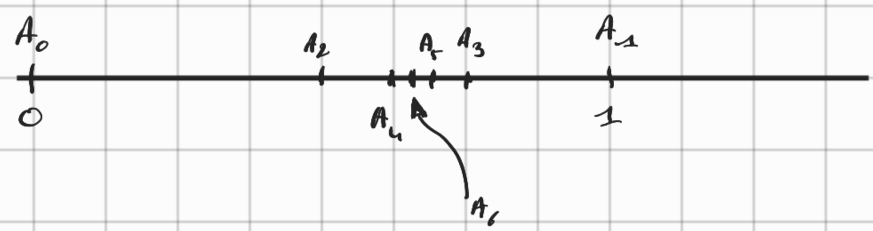
DS 2 du 4 octobre (Suites)
Terminale spé math
CORRECTION

Exercice 1

(1) a)



b) $a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $a_3 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$

$a_4 = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{8}$ $\qquad$ $a_5 = \frac{\frac{5}{8}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{11}{16}$

et $a_6 = \frac{\frac{11}{16}+\frac{5}{8}}{2} = \frac{21}{32}$

c) A_{n+2} étant le milieu de $[A_n, A_{n+1}]$,

on a : $\overrightarrow{OA_{n+2}} = \overrightarrow{OA_n} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$, d'où

$a_{n+2} = a_n + \frac{a_{n+1}-a_n}{2}$ donc $\boxed{a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}}$

(2) <u>Hérédité :</u>

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que

$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$,

d'où $a_{n+1} - 1 = -\frac{1}{2}a_n$

ou encore

$$a_n = -2(a_{n+1} - 1)$$

or $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$

donc $a_{n+2} = \dfrac{-2(a_{n+1}-1)+a_{n+1}}{2}$

$= \dfrac{-2a_{n+1}+2+a_{n+1}}{2}$

$= \dfrac{-a_{n+1}+2}{2}$

$= -\frac{1}{2}a_{n+1}+1$

d'où l'hérédité.

<u>Initialisation</u>

$a_1 = 1$ d'après 1-b)

et $-\frac{1}{2}a_0+1 = -\frac{1}{2}\times 0+1 = 1$

donc $a_1 = -\frac{1}{2}a_0+1$

d'où l'initialisation pour $n=0$.

<u>Conclusion</u>

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n+1$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3}$

$= -\frac{1}{2}a_n + 1 - \frac{2}{3}$

$= -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}$

or $v_n = a_n - \frac{2}{3}$ donc $a_n = v_n + \frac{2}{3}$,

d'où

$v_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(v_n+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{2}v_n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

④ (v_n) étant géométrique de raison $-\frac{1}{2} \in]-1;1[$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = v_n + \frac{2}{3}$, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}}$$

Exercice 2

① - a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} - v_{n+1} = \frac{v_n + 3w_n}{4} - \frac{2v_n + w_n}{3}$$

$$= \frac{3v_n + 9w_n - 8v_n - 4w_n}{12}$$

$$= \frac{-5v_n + 5w_n}{12}$$

$$= \frac{5}{12}(w_n - v_n)$$

b) D'après 1-a), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{5}{12} t_n$, donc la suite (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $t_0 = w_0 - v_0 = 10 - 2 = 8$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{t_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n}$$

2 - a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2v_n + w_n}{3} - v_n$$

$$= \frac{2v_n + w_n - 3v_n}{3}$$

$$= \frac{w_n - v_n}{3}$$

$$= \frac{1}{3} k_n$$

or d'après 1-b, $k_n > 0$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$

$v_{n+1} > v_n$

$\boxed{(v_n) \text{ est donc croissante}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{v_n + 3w_n}{4} - \frac{4w_n}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - w_n)$$

$$= \frac{1}{4}(-k_n)$$

or $k_n > 0$ donc

$w_{n+1} - w_n < 0$

$w_{n+1} < w_n$

La suite (w_n) est donc décroissante.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_0 \leq v_n$ car (v_n) est croissante

$v_n \leq w_n$ car $0 < k_n$

et $w_n \leq w_0$ car (w_n) est decroissante

Donc $v_0 \leq v_n \leq w_n \leq w_0$

d'où $2 \leq v_n \leq w_n \leq 10$

et par conséquent $\boxed{v_n \leq 10 \text{ et } w_n \geq 2}$

d) la suite (v_n) est croissante et majorée par 10, donc elle converge
la suite (w_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge

(3) D'après 2-d), il existe deux réels ℓ et ℓ' tels que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell'$$

or $\frac{5}{12} \in]-1;1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} k_n = 0$

d'ou $\lim_{n\to+\infty} (v_n - w_n) = 0$

et par conséquent $\ell - \ell' = 0$

Donc $\boxed{\ell = \ell'}$

les suites (v_n) et (w_n) ont donc la même limite.

(4) - a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3v_{n+1} + 4w_{n+1} \\ &= 3 \cdot \frac{2v_n + w_n}{3} + 4\,\frac{v_n + 3w_n}{4} \\ &= 2v_n + w_n + v_n + 3w_n \\ &= 3v_n + 4w_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

Donc (t_n) est constante.

b) d'après 4-a,

$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = t_0$

avec $t_0 = 3v_0 + 4w_0 = 3\times2 + 4\times10 = 46$

donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 46$

d'où $\lim_{n\to+\infty} t_n = 46$

et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} (3v_n + 4w_n) = 46$$

or $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell$

donc $3\ell + 4\ell = 46$

et par conséquent $\ell = \frac{46}{7}$

la limite ℓ des suites (v_n) et (w_n) est donc $\frac{46}{7}$

Exercice 3

① Soit $n \in \mathbb{N}$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$n^2 - 1 \leq n^2 + \sin(n) \leq n^2 + 1$$

donc $\boxed{\dfrac{n^2-1}{n^3-2n+5} \leq \dfrac{n^2+\sin(n)}{n^3-2n+5} \leq \dfrac{n^2+1}{n^3-2n+5}}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, n^3-2n+5 > 0$

En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - 2n + 5 = n(n^2-2) + 5$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n(n^2-2) \geq 0$ donc $n^3 - 2n + 5 > 0$

et pour $n \in \{0, 1\}$, $n^3 - 2n + 5 \geq 4 > 0$

② - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{n^2-1}{n^3-2n+5} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(n - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{n - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}$$

avec $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \left(n - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = +\infty$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^2-1}{n^3-2n+5} = 0}$

De même, $\dfrac{n^2+1}{n^3-2n+5} = \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{n-\frac{2}{n}+5}$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3-2n+5} = 0}$

b) D'après les résultats de 2-a), en utilisant le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \ell_n = 0}$$