Terminales Maths Expert
DS 2
CORRECTION

Exercice 1

① Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$5z + 3i + 2 = iz - 2 \iff 5z - iz = -4 - 3i$$
$$\iff z(5 - i) = -4 - 3i$$
$$\iff z = \frac{-4 - 3i}{5 - i}$$

or
$$\frac{-4-3i}{5-i} = \frac{(-4-3i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$$
$$= \frac{-20 - 4i - 15i + 3}{26}$$
$$= \frac{-17}{26} - i\,\frac{19}{26}$$

Donc $\boxed{5z + 3i + 2 = iz - 2 \iff z = \frac{-17}{26} - \frac{19}{26}i}$

② Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$

$$2iz - 4\bar{z} = 2z + 1 \iff 2i(a+ib) - 4(a - ib) = 2(a + ib) + 1$$
$$\iff 2ia - 2b - 4a + 4ib = 2a + 2ib + 1$$
$$\iff -6a - 2b - 1 + i(2a + 2b) = 0$$
$$\iff \begin{cases} -6a - 2b = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -4a = 1 & L_1 + L_2 \to L_1 \\ 4b = 1 & L_1 + 3L_2 \to L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

donc $\boxed{2iz - 4\bar{z} = 2z + 1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i}$

(3) Soit $z \in \mathbb{C}$

$$2z^2 + 10z + 6 = 0 \Longleftrightarrow z^2 + 5z + 3 = 0$$

Soit Δ le discriminant de $z^2 + 5z + 3$

$$\Delta = 25 - 4 \times 3 = 25 - 12 = 13$$

Donc $z^2 + 5z + 3 = 0$ à deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont :

$$z_1 = -\frac{5 - \sqrt{13}}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-10 + \sqrt{13}}{2} = \frac{-5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

d'où $2z^2 + 10z + 6 = 0 \Longleftrightarrow z = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$ ou $z = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$

Exercice 2

① Soit $b \in \mathbb{R}$

$$P(ib) = (ib)^4 + 4(ib)^3 + 19(ib)^2 + 64\,ib + 48$$
$$= b^4 - 4ib^3 - 19b^2 + 64ib + 48$$
$$= b^4 - 19b^2 + 48 + ib(-4b^2 + 64)$$

donc $P(ib) = 0 \iff \begin{cases} b^4 - 19b^2 + 48 = 0 \\ b(-4b^2 + 64) = 0 \end{cases}$

or $b(-4b^2+64) = 0 \iff 4b(-b^2+16) = 0$
$\iff 4b(b+4)(-b+4) = 0$
$\iff b=0$ ou $b=-4$ ou $b=4$

De plus $0^4 - 19\times 0^2 + 48 = 48 \neq 0$
$4^4 - 19\times 4^2 + 48 = 256 - 19\times 16 + 48$
$= 256 - 304 + 48$
$= 0$

et $(-4)^4 - 19\times(-4)^2 + 48 = 4^4 - 19\times 4^2 + 48 = 0$

donc $P(ib) = 0 \iff b = 4$ ou $b = -4$

P admet donc deux et seulement deux racines imaginaires pures, $4i$ et $-4i$

② - a) Soit $z \in \mathbb{C}$

$$(z^2+16)(z^2+az+b) = z^4 + az^3 + z^2(16+b) + 16az + 16b$$

donc, par identification des coefficients

$$\forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z^2+16)(z^2+az+b) \iff \begin{cases} a = 4 \\ 16+b = 19 \\ 16a = 64 \\ 16b = 48 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

donc $\boxed{P(z) = (z^2+16)(z^2+4z+3)}$

2-b) Soit $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = 0 \iff (z^2+16)(z^2+4z+3) = 0$$

$$\iff z^2+16 = 0 \text{ ou } z^2+4z+3 = 0$$

or $z^2+16 = 0 \iff z^2-(4i)^2 = 0$

$$\iff (z-4i)(z+4i) = 0$$

$$\iff z = 4i \text{ ou } z = -4i$$

D'autre part, -1 étant une racine évidente de z^2+4z+3

$$z^2+4z+3 = (z+1)(z+3)$$

d'où $z^2+4z+3 = 0 \iff z = -1$ ou $z = -3$

Donc $\boxed{P(z) = 0 \iff z = 4i \text{ ou } z = -4i \text{ ou } z = -1 \text{ ou } z = -3}$

Exercice 3

Soit z_1 une solution de $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$

On a donc :

$$z_1^4 + az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d = 0$$

d'où $\overline{z_1^4 + az_1^3 + bz_1^2 + cz_1 + d} = \overline{0}$

donc $\overline{z_1}^4 + \overline{a}\,\overline{z_1}^3 + \overline{b}\,\overline{z_1}^2 + \overline{c}\,\overline{z_1} + \overline{d} = 0$

or $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ donc $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b$, $\overline{c} = c$ et $\overline{d} = d$

donc $\overline{z_1}^4 + a\,\overline{z_1}^3 + b\,\overline{z_1}^2 + c\,\overline{z_1} + d = 0$

et par conséquent, $\overline{z_1}$ est solution de

$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$

Exercice 4