Terminale Maths Expert - INT2 : Nombres complexes

2023-2024

Exercice 1

résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner la ou les solutions sous forme algébrique :

1. $5z + 3i + 2 = iz - 2$
2. $2iz - 4\overline{z} = 2z + 1$
3. $2z^2 + 10z + 6 = 0$

Exercice 2

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 19z^2 + 64z + 48.$$

1. On sait que l'équation $p(z) = 0$ admet au moins une solution imaginaire pure.
   Déterminer alors la ou les solutions imaginaires pure de l'équation $p(z) = 0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z + 16)\left(z^2 + az + b\right)$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 3

Soient a, b, c et d quatre réels.

1. Démontrer que si z_1 est une solution de l'équation $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, alors $\overline{z_1}$ l'est aussi.
2. Peut-on généraliser cette propriété si a, b, c, et d sont trois complexes.
   Démontrer la dans l'affirmative, sinon, donner un contre exemple

Exercice 4

BONUS

1. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{n+1}}{2}$$

2. En déduire les sommes réelles :

   (a) $S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^p(2p + 1)$
   (b) $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + (-1)^{p+1}2p$