Polynôme du second degré

Exercice 1

Soit f et g les polynômes définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - 1$$

1. Calculer $f + g$, $f \times g$ et $4f$
2. Quel est l'ensemble de définition de $\dfrac{f}{g}$
3. La fonction $\dfrac{f}{g}$ est-elle un polynôme ?

Exercice 2

Soit f le polynôme défini par :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$$

1. Donner le degré de f
2. Montrer que $f(x) = (x^2 - 2x + 3)(2x - 1)$

Exercice 3

Développer, réduire et ordonner chacun des polynômes suivants selon les termes de degrés décroissants.

1. $(x^2 + 1)^2$
2. $(2x - 3)^2 (2x + 2)$
3. $(2x + 3)^3$
4. $(3x - 1)^2 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$

Exercice 4

Les polynômes définis ci-dessous sont-ils égaux ?

$$f : x \mapsto (4x - 3)^2 + 5x - 7 \qquad \text{et} \qquad g : t \mapsto 2\left(8t^2 + 1\right) - 19t$$

Exercice 5

Dans chaque cas, écrire la fonction f comme quotient de deux polynômes.

1. Pour tout réel $x \neq 2$, $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{2}{x-2}$
2. Pour tout réel $x \neq -2$ et $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1} + \dfrac{2x-1}{x+2}$

Exercice 6

Soit f le polynôme défini par :

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$$

1. Calculer $f(1)$
2. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

   où a, b et c sont trois réels à déterminer.

Exercice 7

Donner la forme canonique des polynômes suivants :

1. $x \mapsto -x^2 + 2x + 5$
2. $x \mapsto 4x^2 - x + 1$
3. $x \mapsto 2x^2 - 6x + 5$
4. $x \mapsto -3x^2 + x + 2$

Exercice 8

Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

1. Déterminer la forme canonique de f.
2. En déduire que pour tout réel x, $f(x) \geq -\dfrac{25}{4}$

Exercice 9

Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

1. Déterminer la forme canonique de f.
2. En déduire que pour tout réel x, $f(x) \leq \dfrac{4}{3}$

3. Est-il vrai que pour tout réel x, $f(x) \leq 2$?

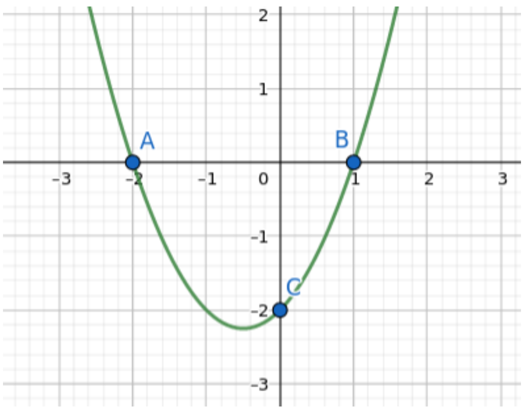
Exercice 10

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 + x + 1 = 0$
2. $-x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $-2x^2 + 3x + 4 = 0$
4. $2x^2 - 4x + 2 = 0$
5. $5x^2 + 2x = 6x^2 - 7$
6. $2x - 5x^2 - 1 = 5$
7. $\left(1 + \sqrt{2}\right) x^2 - 4x + 1 - \sqrt{2} = 0$

Exercice 11

Déterminer la forme développée du polynôme du second degré dont une partie de la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Exercice 12

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer sous forme factorisée les fonctions polynômes du second degré admettant pour racines :
   (a) -2 et 3
   (b) $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{1}{4}$
2. Déterminer sous forme factorisée puis sous forme développée la fonctions polynôme du second degré admettant -3 et 4 pour racines et telle que $f(0) = 24$
3. f est une fonction polynôme du second degré admettant -1 pour racine et dont le produit des racines est 3.
   (a) Déterminer sous forme factorisée une expression $f(x)$.
   (b) Déterminer la forme développé de $f(x)$ sachant que $f(1) = 2$.

Exercice 13

Dresser le tableau de signe du polynôme ci-dessous.

$$f : x \mapsto 3\,(x+5)\,(x-7)$$

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
$x+5$			0				
$x-7$					0		
$f(x)$			0		0		

Exercice 14

Dresser le tableau de signe du polynôme ci-dessous.

$$g : x \mapsto -3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

Exercice 15

Dresser le tableau de signe du polynôme ci-dessous.

$$f : t \mapsto \frac{1}{2}\,(4t-1)\,(3t-2)$$

Exercice 16

Déterminer le signe de chaque expression.

1. $-3\,(x+2)\,(x-7)$
2. $5\,(1-x)\,(x+8)$
3. $4\,(2-u)\,(11-u)$
4. $\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

Exercice 17

L'objectif de cet exercice est l'étude des variations d'un polynôme du second degré.

1. Etude d'un exemple.
   Soit P le polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 - 3x + 2$
   (a) Soit α et β deux réels. Montrer que :
   $$P(\alpha) - P(\beta) = 2\,(\alpha-\beta)\left(\alpha+\beta-\frac{3}{2}\right)$$
   .
   (b) Montrer que si $\alpha < \beta < \dfrac{3}{4}$, alors $P(\alpha) > P(\beta)$.
   Que peut-on en déduire ?

(c) Montrer que si $\frac{3}{4} < \alpha < \beta$, alors $P(\alpha) < P(\beta)$.
Que peut-on en déduire ?

2. Généralisation.
Soit Q le polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = ax^2+bx+c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.
   (a) Soit α et β deux réels. Montrer que :
$$Q(\alpha) - Q(\beta) = a(\alpha - \beta)\left(\alpha + \beta + \frac{b}{a}\right)$$
.
   (b) Montrer que si $\alpha < \beta < \frac{-b}{2a}$, alors $P(\alpha) - P(\beta)$ est du signe de a.
   Que peut-on en déduire ?
   (c) Montrer que si $\frac{-b}{2a} < \alpha < \beta$, alors $P(\alpha) < P(\beta)$ est du signe de $-a$.
   Que peut-on en déduire ?

Exercice 18

Soit (E) l'équation $5x^2 - 4x - 1 = 0$

1. Vérifier que 1 est solution de l'équation et en déduire la forme factorisée de $5x^2 - 4x - 1$
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 19

Un champ rectangulaire a pour périmètre 64m et pour aires 255m^2.
Déterminer la longueur et la largeur de ce champ.

Exercice 20

Résoudre chacune des inéquations suivantes.

1. $x^2 - 7x + 10 < 0$
2. $2x^2 - x + 5 \leq 0$
3. $-7x^2 + 3x + 2 \geq 2$
4. $2x^2 + 4x < -3x - 3$
5. $2t^2 - 3t + \frac{9}{8} > 0$
6. $(1-2x)(4+5x) < 0$
7. $(2x-3)(x+1) \leq 0$

Exercice 21

Résoudre chaque système d'équation

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = -14 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u+v=-8 \\ uv=16 \end{cases}$

Exercice 22

Soit m un réel.
A chaque valeur de m, on associe l'équation (E_m) définie par :

$$x^2+(m-1)x-m(2m-1)=0$$

1. Etude de cas particulier. Résoudre l'équation (E_m) dans chacun des cas suivants :
   (a) $m=0$
   (b) $m=\frac{1}{3}$
   (c) $m=1$
2. Cas général
   (a) Montrer que le discriminant Δ de (E_m) est :
   $$\Delta=(3m-1)^2$$
   (b) En déduire les solutions de (E_m) en fonction de m dans chacun des cas suivants :
      i. $m>\frac{1}{3}$
      ii. $m=\frac{1}{3}$
      iii. $m<\frac{1}{3}$

Exercice 23

Un pré rectangulaire a un périmètre de 100m. Déterminer les dimensions possibles de ce pré pour que sa superficie soit au moins égale à $621m^2$

Exercice 24

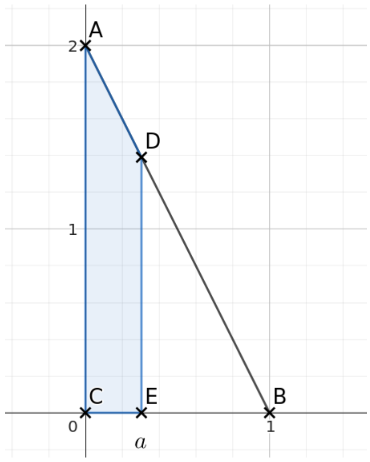
Un athlète lance un javelot.
La hauteur h en mètre du javelot en fonction du temps est donné par la fonction suivante :

$$\begin{aligned} h:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{-1}{2}(t-16)(t+0,5) \end{aligned}$$

1. Après combien de seconde le javelot touche-t-il le sol ?
2. Quelle la hauteur maximale atteinte par le javelot ?
3. Combien de temps mettra le javelot pour atteindre 32,5 mètres ?

Exercice 25

Soit ABC le triangle rectangle rectangle ci-contre.
Déterminer la valeur du réel a tel que l'aire du triangle DBE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC, a étant l'abscisse du point E, où E est un point du segment $[CE]$.



Exercice 26

Calculatrice autorisée

La fontaine Nicholas J Melas Centenial, aussi appelé Water Arc, est une fontaine qui envoie un jet d'eau traversant la rivère de Chicago aux USA (The Chicago River).
Toutes les heures, un canon à eau envoie un jet d'eau pendant 10 minutes.
Le chemin approximatif de l'eau au dessus de la rivière peut être modélisé par la fonction h définie sur l'intervalle $[0;26]$ par :

$$h(x) = -0,006x^2 + 1,2x + 10$$

ou h est la hauteur en mètre du jet d'eau par rapport à l'eau de la rivière, et en fonction de la distance x en mètre par rapport au canon.

1. Des passants se promenant de l'autre coté de la rivière, voient le canon à eau se mettre en marche. Ils se trouvent à une distance de 210 mètres du canon, dans l'axe dà l'eau de la rivière.
   Seront-ils mouillés ?
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le jet d'eau ?

3. La ville de Chicago souhaite rajouter une structure de métal dans la rivière. Cette dernière est composée d'un pied et, à son extrémité, d'un cercle de 10 mètres de diamètre.
La structure doit être à 50 mètres du canon et de telle sorte que le jet d'eau passe au milieu du cercle. A quelle hauteur devra être le centre du cercle ?

Exercice 27

(E) désigne l'équation $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E)
2. Démontrer que si x_0 est solution de (E), alors $\dfrac{1}{x_0}$ est aussi solution de (E).
3. Démontrer que (E) est équivalente à $x^2 - 4x + 2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$
4. Développer $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$
5. En posant $X = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, démontrer que l'équation $x^2 - 4x + 2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$ se ramène à une équation du second degré.
6. Résoudre cette équation du second degré puis en déduire les solution de (E).

Exercice 28

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.
Soit f, g et h trois polynôme définis par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$g(x) = -2x^2 - 8x - 1$$

$$h(x) = -\frac{12}{7}x^2 - \frac{24}{7}x + 7$$

$\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont les courbes représentant respectivement f, g et h dans un repère.

1. Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en un seul point.
2. La courbe $\mathcal{C}_h$ passe par les sommets des deux autres paraboles $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[1,5; 2,5]$, $f(x) < 0$, $g(x) < 0$ et $h(x) < 0$.
4. Pour tout réel x de l'intervalle $[-2; +\infty[$, $h(x) \geq g(x)$.
5. L'équation $g(x) = h(x)$ a une seule solution.

Exercice 29

Le poids diminue avec l'altitude. Ainsi, si un astronaute a une masse de 60 kg, son poids en N à l'altitude x en km est donné par :

$$P = 60 \times 9,8 \left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2$$

- A quelle altitude l'astronaute aura t'il un poids de 25 N ?