Terminales spécialité maths : DM2

2023-2024

Suites récurrente et fonction exponentielle

Partie A : Étude de la fonction

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par :

$$f : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Déterminer les variations de f sur $[0;+\infty[$.

Partie B : Étude de suite

On donne sur l'annexe 1, dans un repère du plan, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f, et la droite Δ d'équation $y = x$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

1. Compléter l'annexe 1 en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ pour placer sur l'axe des abscisses les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. (*Laisser les traits de constructions au crayon de bois*)
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. On admet que la limite l de la suite (u_n) est solution de l'équation $x = f(x)$.
   Résoudre cette équation et en déduire l.

Partie C : Un programme et une somme

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Recopier et compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie la somme S_n

```
def Somme(n) :
    u = .....
    S = .....
    for k in range(.....) :
        u = ........
        S = ........
    return .........
```

ANNEXE

Nom : .... Classe : ....

Prénom : ....

Exercice 3

A rendre avec la copie