TS - DS 2 du 4 octobre

2023-2024

EXERCICE 1

On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $(\text{O} ; \overrightarrow{\imath})$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. (a) Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
   On prendra 10 cm comme unité graphique.
   (b) Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
   Calculer a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6.
   (c) Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.
2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

EXERCICE 2

Soient (v_n) et (w_n) deux suites définies par $v_0 = 2$, $w_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \frac{2v_n + w_n}{3} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{v_n + 3w_n}{4}$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$w_{n+1} - v_{n+1} = \frac{5}{12}(w_n - v_n)$$
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $k_n = w_n - v_n$.
   Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$k_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$$
2. (a) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite (w_n) est décroissante.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 10$ et $w_n \geqslant 2$
   (d) En déduire que les suites (v_n) et (w_n) convergent.
3. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) ont la même limite.
4. (a) Montrer que la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = 3v_n + 4w_n$ est constante.
   (b) En déduire que la limite des suites (v_n) et (w_n) est $\dfrac{46}{7}$

EXERCICE 3

Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$k_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n^3 - 2n + 5}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{n^2 - 1}{n^3 - 2n + 5} \leqslant k_n \leqslant \frac{n^2 + 1}{n^3 - 2n + 5}$$

2. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 1}{n^3 - 2n + 5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 1}{n^3 - 2n + 5}$

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n$