Géométrie dans l'espace : equations paramétriques

Exercice 1

On considère le cube $ABCDEFGH$. Les points K, L, M sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[HG]$, $[EF]$.
Les points P et Q représentent l'intersection de la droite (KL) respectivement avec les plans (ABF) et (CBF).

1. faire une figure
2. (a) Justifier que le point P est l'intersection des droites (EF) et (KL).
   (b) En déduire que le point K est le milieu du segment $[PL]$.
   On admet que par un raisonnement similaire, le point L est le milieu du segment $[KQ]$:
   (a) Justfier l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

Exercice 2

Soient $ABCDE$ une pyramide à base carrée où les points I et J représentent les milieux respectifs des arêtes $[BE]$ et $[CE]$.

1. faire une figure.
2. Justifier que les points A, D, I, J sont coplanaires.
3. (a) Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.
   (b) On note M leur point d'intersection. Placer le point M dans la figure ci-dessus.
4. En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE).

Exercice 3

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constitué de la base carrée $ABCD$ et de quatre triangles équilatéraux.
Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
Le segment $[SO]$ est par conséquent la hauteur de la pyramide et toutes les arêtes ont la même longueur.

1. faire une figure
2. Justifier que le repère $\left(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point K.
   (b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   (c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   (d) Déterminer les coordonnées du point L.

Exercice 4

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.
Donnez trois points et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes.

$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -3-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1+2t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}. \quad \mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 5-t \\ y & = & 3 \\ z & = & 1+5t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{D}_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2k+3 \\ y & = & -k-1 \\ z & = & 1+3k \end{array} \right. , k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.
Déterminez une équation paramétrique de la droite (AB) avec $A\,(1; -2; 3)$ et $B\,(2; 0; -5)$

Exercice 6

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, donner si possible les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

1.
$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1+3t \\ y & = & 2-4t \\ z & = & 1-5t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}. \quad \mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 6-k \\ y & = & 2-2k \\ z & = & -10+k \end{array} \right. , k \in \mathbb{R}.$$

2.
$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & 5-t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}. \quad \mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 6-2k \\ y & = & 2-2k \\ z & = & -4+3k \end{array} \right. , k \in \mathbb{R}.$$

3. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A\,(1; -2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}_2$ est la

droite passant par $B\,(1;0;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

Exercice 7

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.

Déterminer une equation paramétrique de la parallèle à la droite (AB) passant par C avec :

$$A\,(1;-2;3) \qquad B\,(0;1;1) \quad \text{et} \quad C\,(3;2;0)$$

Exercice 8

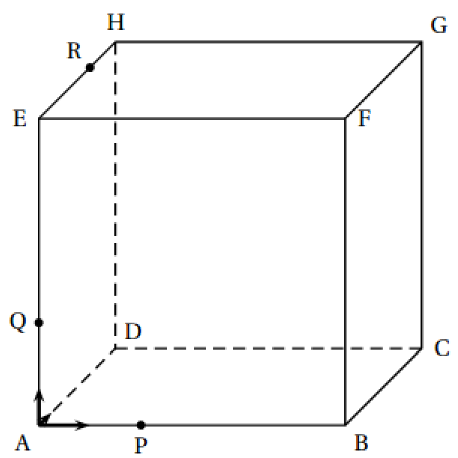
Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

Soit M et N les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}$$

Montrer que le point C appartient à la droite (MN).

Exercice 9



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 6.

Les points P, Q, R et S sont définis par :

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

et

$$\overrightarrow{\mathrm{ER}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{GS}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{GH}}$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ avec :

$$\overrightarrow{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \text{ et } \overrightarrow{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AE}}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$\mathrm{B}(6\ ;\ 0\ ;\ 0), \mathrm{F}(6\ ;\ 0\ ;\ 6) \text{ et } \mathrm{R}(0\ ;\ 4\ ;\ 6).$$

1. (a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et S.
   (b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{QR}$.
   (c) Démontrer que $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont coplanaires.
   (d) Que peut-on en déduire concernant les points P, Q, R et S ?

(e) Justifier que les droites (PQ) et (RS) sont sécantes.

2. (a) Déterminer une équation paramétrique de la droite (PQ).

   (b) Déterminer une équation paramétrique de la droite (RS)

   (c) En déduire les coordonnées du point d'intersection M des droites (PQ) et (RS).

3. Placer le point M sur la figure donnée en annexe.
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

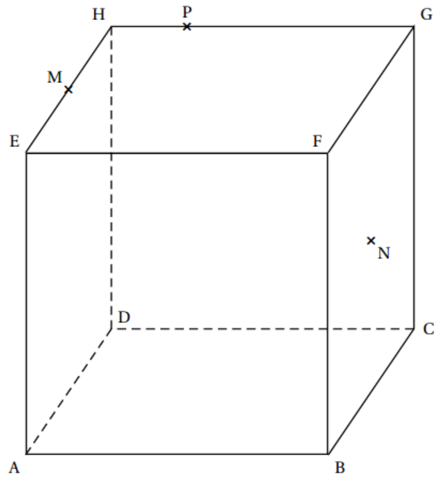
Exercice 10

On considère un cube ABCDEFCH. On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}$$

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   (a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (MP).
3. Déterminer une équation paramétrique de la droite (FG).
4. En déduire les coordonnées du point L.

Exercice 11

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère les points $\mathrm{I}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$, $\mathrm{K}\left(\dfrac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et $\mathrm{L}(a\ ;\ 1\ ;\ 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y & = & t' \\ z & = & 1 - t' \end{array}\right. ,\ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point M, point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (FG).
3. Tracer ci dessous la section du cube par le plan (IJK).