Géométrie dans l'espace : equations paramétriques

Exercice 1

On considère le cube $ABCDEFGH$. Les points K, L, M sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[HG]$, $[EF]$.
Les points P et Q représentent l'intersection de la droite (KL) respectivement avec les plans (ABF) et (CBF).

1. faire une figure
2. (a) Justifier que le point P est l'intersection des droites (EF) et (KL).
   (b) En déduire que le point K est le milieu du segment $[PL]$.
   On admet que par un raisonnement similaire, le point L est le milieu du segment $[KQ]$:
   (a) Justfier l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$

Correction de l'exercice 1

Exercice 2

Soient $ABCDE$ une pyramide à base carrée où les points I et J représentent les milieux respectifs des arêtes $[BE]$ et $[CE]$.

1. faire une figure.
2. Justifier que les points A, D, I, J sont coplanaires.
3. (a) Justifier que les droites (AI) et (DJ) sont sécantes.
   (b) On note M leur point d'intersection. Placer le point M dans la figure ci-dessus.
4. En déduire la droite d'intersection des plans (ABE) et (CDE).

Correction de l'exercice 2

Exercice 3

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constitué de la base carrée $ABCD$ et de quatre triangles équilatéraux.
Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
Le segment $[SO]$ est par conséquent la hauteur de la pyramide et toutes les arêtes ont la même longueur.

1. faire une figure
2. Justifier que le repère $\left(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point K.
   (b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   (c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   (d) Déterminer les coordonnées du point L.

Correction de l'exercice 3

Exercice 4

Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.
Donnez trois points et un vecteur directeur de chacune des droites suivantes.

$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -3 - 2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1 + 2t \end{array} \right., t \in \mathbb{R}. \quad \mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 5 - t \\ y & = & 3 \\ z & = & 1 + 5t \end{array} \right., t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{D}_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2k + 3 \\ y & = & -k - 1 \\ z & = & 1 + 3k \end{array} \right., k \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 4

Pour trouver un point d'une droite dont on connaît une équation paramétrique, il suffit de prendre une valeur quelconque du paramètre.

1. Pour $\mathcal{D}_1$, en substituant successivement le paramètre par 0, puis par 1 puis par -1, on trouve trois points de cordonnées $(-3; 0; 1)$, $(-5; 2; 3)$ et $(-1; -2; -1)$
   Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est donné par les trois réels multipliant le paramètre, c'est à dire :
   $$\overrightarrow{d_1} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
2. Pour $\mathcal{D}_2$, en substituant successivement le paramètre par 0, puis par 1 puis par 2, on

trouve trois points de cordonnées $(5;3;1)$, $(4;3;6)$ et $(3;3;11)$
Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est :

$$\overrightarrow{d_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Pour $\mathcal{D}_3$, en substituant successivement le paramètre par 0, puis par 1 puis par $\sqrt{2}$, on trouve trois points de cordonnées $(3;-1;1)$, $(3;0;4)$ et $(2\sqrt{2}+3;-\sqrt{2}-1;1+3\sqrt{2})$
Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$ est :

$$\overrightarrow{d_3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Soit $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.
Déterminez une équation paramétrique de la droite (AB) avec $A\,(1;-2;3)$ et $B\,(2;0;-5)$

Correction de l'exercice 5

La droite (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$,
avec $x_B-x_A=2-1=1$, $y_B-y_A=0-(-2)=2$ et $z_B-z_A=-5-3=-8$.
Une équation paramétrique de (AB) est donc :

$$(AB):\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & -2+2t \\ z & = & 3-8t \end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.$$

Exercice 6

Soit $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, donner si possible les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

1. $$\mathcal{D}_1:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3t \\ y & = & 2-4t \\ z & = & 1-5t \end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.\quad \mathcal{D}_2:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6-k \\ y & = & 2-2k \\ z & = & -10+k \end{array}\right.,k\in\mathbb{R}.$$

2. $$\mathcal{D}_1:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & 5-t \end{array}\right.,t\in\mathbb{R}.\quad \mathcal{D}_2:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6-2k \\ y & = & 2-2k \\ z & = & -4+3k \end{array}\right.,k\in\mathbb{R}.$$

3. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A\,(1;-2;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}_2$ est la

droite passant par $B\,(1;0;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 6

1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont un point en commun $M\,(x_M, y_M, z_M)$ s'il existe deux paramètres t_M et k_M tels que :
$$\left\{\begin{array}{rclcl} x_M & = & 1+3t_M & = & 6-k_M \\ y_M & = & 2-4t_M & = & 2-2k_M \\ z_M & = & 1-5t_M & = & -10+k_M \end{array}\right.$$
Pour répondre à cette question, on peut donc essayer de résoudre un système de trois équations à deux inconnues.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+3t & = & 6-k \\ 2-4t & = & 2-2k \\ 1-5t & = & -10+k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k & = & 5-3t \\ 2k & = & 4t \\ 1-5t & = & -10+k \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} k & = & 5-3t \\ k & = & 2t \\ 1-5t & = & -10+k \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2t & = & 5-3t \\ k & = & 2t \\ 1-5t & = & -10+k \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 1 \\ k & = & 2t \\ 1-5t & = & -10+k \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 1 \\ k & = & 2 \\ -4 & = & -8 \end{array}\right.$$
or $-4 \neq -8$, donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont aucun point en commun, elles ne sont donc pas sécantes.
2. Pour résoudre le système suivant, on utilisera en partie la méthode des combinaisons

linéaires.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3t & = & 6-2k \\ 1-2t & = & 2-2k \\ 5-t & = & -4+3k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 5t-1 & = & 4 & L_1-L_2 \\ 3 & = & 18-10k & 2L_1+3L_2 \\ 5-t & = & -4+3k & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 1 \\ -15 & = & -10k \\ 5-t & = & -4+3k \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 1 \\ k & = & 1,5 \\ 1-1 & = & -4+3\times 1,5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 1 \\ k & = & -1,5 \\ 0 & = & 0,5 \end{array}\right.$$

or $0 \neq 0,5$, donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont aucun point en commun et par conséquent elles ne sont pas sécantes.

3. $\mathcal{D}_1$ étant la droite passant par $A\,(1;-2;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{D}_2$ celle passant par $B\,(1;0;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, elles ont pour équations paramétriques :

$$\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & -2+2t \\ z & = & 3-t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}. \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & k \\ z & = & -1-2k \end{array}\right. ,k\in\mathbb{R}.$$

De plus :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+t & = & 1 \\ -2+2t & = & k \\ 3-t & = & -1-2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ k & = & -2 \\ 3-0 & = & -1-2\times(-2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ k & = & -2 \\ 3 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ k & = & -2 \end{array}\right.$$

Donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et leur point d'intersection est le point de $\mathcal{D}_1$ ayant pour paramètre 0 (ou le point de $\mathcal{D}_2$ ayant pour paramètre -2 qui est le même point), c'est à dire le point de coordonnées $(1;-2;3)$.

Exercice 7

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé.
Déterminer une equation paramétrique de la parallèle à la droite (AB) passant par C avec :

$$A\,(1;-2;3) \qquad B\,(0;1;1) \quad \text{et} \quad C\,(3;2;0)$$

Correction de l'exercice 7

La parallèle à (AB) passant par C est la droite passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$,

d'où une équation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-t \\ y & = & 2+3t \\ z & = & -2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$$

Exercice 8

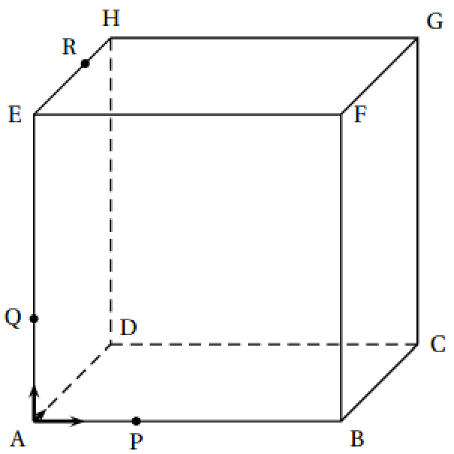
Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Soit M et N les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}$$

Montrer que le point C appartient à la droite (MN).

Correction de l'exercice 8

Exercice 9



Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 6.
Les points P, Q, R et S sont définis par :

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

et

$$\overrightarrow{\mathrm{ER}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{GS}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{GH}}$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ avec :

$$\overrightarrow{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \text{ et } \overrightarrow{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AE}}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$\mathrm{B}(6\ ;\ 0\ ;\ 0), \mathrm{F}(6\ ;\ 0\ ;\ 6) \text{ et } \mathrm{R}(0\ ;\ 4\ ;\ 6).$$

1. (a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et S.
   (b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{QR}$.
   (c) Démontrer que $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont coplanaires.
   (d) Que peut-on en déduire concernant les points P, Q, R et S ?
   (e) Justifier que les droites (PQ) et (RS) sont sécantes.
2. (a) Déterminer une équation paramétrique de la droite (PQ).
   (b) Déterminer une équation paramétrique de la droite (RS)
   (c) En déduire les coordonnées du point d'intersection M des droites (PQ) et (RS).
3. Placer le point M sur la figure donnée en annexe.
   On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

Correction de l'exercice 9

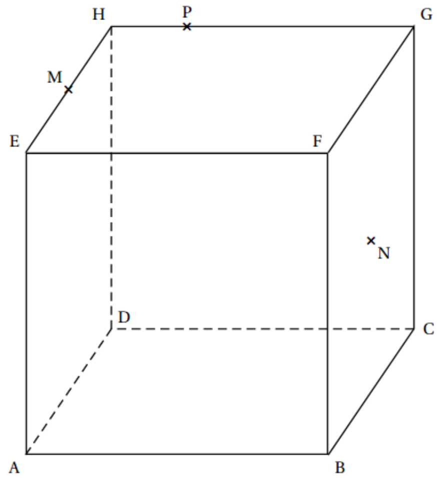
Exercice 10

On considère un cube ABCDEFCH. On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HG}}$$

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   (a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer une équation paramétrique de la droite (MP).
3. Déterminer une équation paramétrique de la droite (FG).
4. En déduire les coordonnées du point L.

Correction de l'exercice 10

Exercice 11

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 0\right)$, $J\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et $L(a\ ;\ 1\ ;\ 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

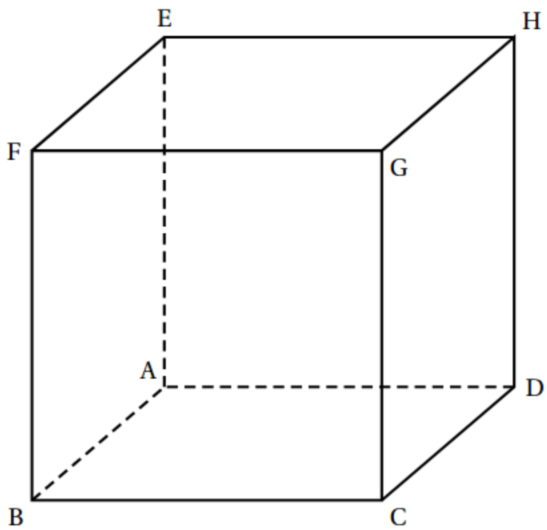
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \quad , \ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point M, point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (FG).
3. Tracer ci dessous la section du cube par le plan (IJK).



Correction de l'exercice 11