Maths Expert.
DS 3
Correction.

Exercice 1

(1) $z_1 = -z_2 \iff a(a-1)+i(b^2+1) = -(a-1)-2ib$

$$\iff \begin{cases} a(a-1) = -(a-1) \\ b^2+1 = -2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a(a-1)+(a-1) = 0 \\ b^2+2b+1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a-1)(a+1) = 0 \\ (b+1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{La proposition 1 est donc fausse.}}$ il existe deux couples (a,b) tel que $z_1 = -z_2$, les couples $(1;-1)$ et $(-1;-1)$.

(2) Soit $b \in \mathbb{R}$

$$(2+ib)(2b+i) = 4b + 2i + 2ib^2 - b$$
$$= 3b + 2i(1+b^2)$$

or pour tout réel b, $1+b^2 > 0$

donc $(2+ib)(2b+i)$ possède une partie imaginaire non nulle, et cela, quelque soit le réel b.

$\boxed{\text{La proposition est donc vraie}}$

(3) $z_1 = z_2 \iff 4a^2 - a - 1 + ib(b-1) = 3a - 2 + i(b-1)$

$$\iff \begin{cases} 4a^2 - a - 1 = 3a - 2 \\ b(b-1) = b-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4a^2 - 4a + 1 = 0 \\ b(b-1) - (b-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4a^2 - 4a + 1 = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases}$$

or $(b-1)^2 = 0 \iff b = 1$

De plus, Δ étant le discriminant de $4x^2 - 4x + 1$, on obtient :

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$

donc, $4x^2 - 4x + 1$ a une unique racine :

$x_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$

donc $4a^2 - 4a + 1 = 0 \iff a = \frac{1}{2}$

On en déduit :

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{La proposition 3 est donc vraie}}$

(4) Soit $a \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(a+i)^3 &= (a+i)^2(a+i)\\
&= (a^2+2ai-1)(a+i)\\
&= a^3+ia^2+2a^2i-2a-a-i\\
&= (a^3-3a)+i(3a^2-1)
\end{aligned}
$$

or $3a^2-1=0 \iff (\sqrt{3}a)^2-1^2=0$

$\iff (\sqrt{3}a-1)(\sqrt{3}a+1)=0$

$\iff \sqrt{3}a-1=0$ ou $\sqrt{3}a+1=0$

$\iff \sqrt{3}a=1$ ou $\sqrt{3}a=-1$

$\iff a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(a+i)^3$ est réel.

$\boxed{\text{La proposition 4 est fausse.}}$

Exercice 2

(1) $P(0) = 0^4+2\times 0^3-0^2+2\times 0+1=1$

Donc 0 n'est pas une racine de P

(2) (a) $u^2-3 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3$

$= \left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)-3$

$\boxed{= z^2+\frac{1}{z^2}-1}$

(b) $\frac{P(z)}{z^2} = z^2 + 2z - 1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}$

$= z^2 + \frac{1}{z^2} - 1 + 2\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$\boxed{= u^2 - 3 + 2u}$$

(3) Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$P(z) = 0 \iff \frac{P(z)}{z^2} = 0$

$\iff u^2 + 2u - 3 = 0$

$\iff (u-1)(u+3) = 0$ $\left\{ \text{car } 1 \text{ est une racine évidente de } u^2 + 2u - 3 \right.$

$\iff u = 1$ ou $u = -3$

$\iff z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z + \frac{1}{z} = -3$

(4) (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$z + \frac{1}{z} = -3 \iff z^2 + 1 = -3z$

$\iff z^2 + 3z + 1 = 0$

Soit Δ le discriminant de $z^2 + 3z + 1$

$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 = 5$

$\Delta > 0$ donc $z^2 + 3z + 1 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$

qui sont :

$$\boxed{z_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$

$z + \frac{1}{z} = 1 \iff z^2 + 1 = z$

$\iff z^2 - z + 1$

Soit Δ le discriminant de $z^2 - z + 1$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 = -3$

$\Delta < 0$ donc $z^2 - z + 1 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont :

$$\boxed{z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z^2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}$$

(5) On déduit des questions précédentes que les solutions de $P(z) = 0$ sont :

$$\boxed{z_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \; z_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \; z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \; \text{et} \; z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}$$

Exercice 3

(a) $\begin{cases} d \mid 261 \\ d \mid 423 \end{cases}$ donc $d \mid 26 \times 261 - 16 \times 423$

d'où $d \mid 18$

donc $d \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\}$

b) D'autre part :

- $1 \mid 261$ et $1 \mid 423$
- 2 ne divise pas 261, donc 6 et 18 ne divise pas non plus 261, donc 2, 6 et 18 ne sont pas des diviseurs commun de 261 et 423.
- $9 \mid 261$ car $261 = 9 \times 29$
  $9 \mid 243$ car $423 = 9 \times 47$
  donc 3 et 9 sont des diviseurs commun de 261

et 423

l'ensemble des diviseurs commun de 261 et 423 est donc :
$\{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$

(2) Supposons que $4n+3 \mid 6n+2$, d'où :

$$4n+3 \mid 3\times(4n+3) - 2(6n+2)$$

donc $4n+3 \mid 9-4$

d'où $4n+3 \mid 5$

donc $4n+3 \in \{-5; -1; 1; 5\}$

De plus, $4n+3 = -5 \iff 4n = -8$

$4n+3 = -1 \iff 4n = -4$

$4n+3 = 1 \iff 4n = -2$

$4n+3 = 5 \iff 4n = 2$

donc :

$$\boxed{4n \in \{-8; -4; -2; 2\}}$$

(b) • Avec $4n = -8$, on a $n = -2$ et :

$$\frac{6n+2}{4n+3} = \frac{-12+2}{-8+3} = \frac{-10}{-5} = 2 \in \mathbb{Z}$$

• Avec $4n = -4$, on a $n = -1$ et

$$\frac{6n+2}{4n+3} = \frac{-6+2}{-4+3} = \frac{-4}{-1} = 4 \in \mathbb{Z}$$

• Avec $4n = -2$, on a $n = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z}$

• Avec $4n = 2$, on a $n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Donc $\boxed{\frac{6n+2}{4n+3} \in \mathbb{Z} \iff n = -2 \text{ ou } n = -1}$