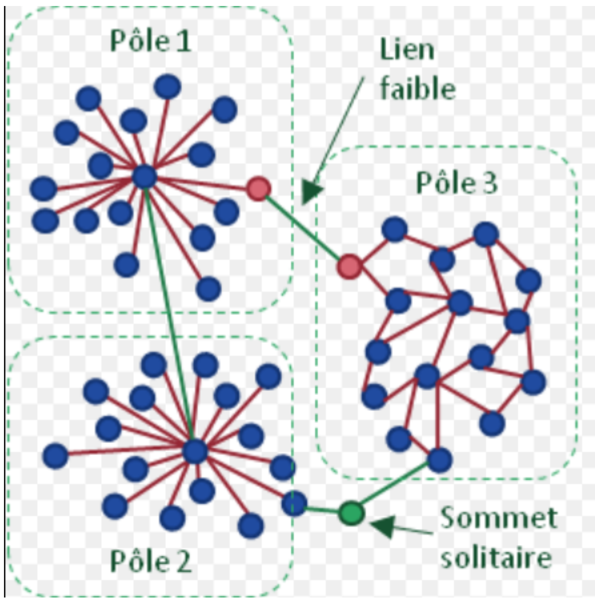
Graphes et algorithmes de graphes

EXERCICES



Exercice 1

Montrer que tout graphe simple à un nombre pair de sommets de degré impair.

Correction de l'exercice 1

Soit $G = \{\mathcal{S}, \mathcal{A}\}$ un graphe simple.
Notons $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ l'ensemble des n sommets de degré impair de G et $I = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ l'ensemble ses m sommets de degré impair.
$\{P, I\}$ est donc une partition de $\mathcal{S}$ et on a, d'après le lemme des poignées de mains :

$$\sum_{k=1}^{n} d(p_k) + \sum_{k=1}^{m} d(i_k) = 2\,\mathrm{card}(A)$$

or, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant m$, $d(i_k)$ étant impair, il existe $q_k \in \mathbb{N}$ tel que $d(i_k) = 2q_k + 1$. On a alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} (2q_k + 1) = 2\,\mathrm{card}(A) - \sum_{k=1}^{n} d(p_k)$

$m + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{m} q_k = 2\,\mathrm{card}(A) - \sum_{k=1}^{n} d(p_k)$

$m = 2\,\mathrm{card}(A) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d(p_k) - 2\sum_{k=1}^{m} q_k$

Donc m est pair, comme somme de nombres pairs.

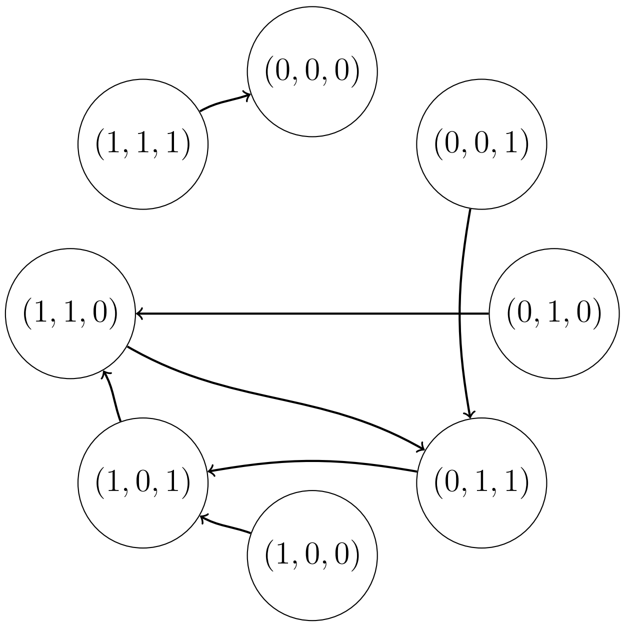
Exercice 2

Un programme prend en entrée une liste (x_1, x_2, x_3) de trois valeurs $x_i \in \{0, 1\}$, et renvoie en sortie une nouvelle liste $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$ avec la convention que $1 + 1 = 0$ (calcul modulo 2). Par exemple, $(0, 0, 1)$ renvoie $(0, 1, 1)$. Représenter l'action du programme par un graphe, afin de répondre aux questions suivantes.

1. En partant d'une liste choisie aléatoirement, quelle est la probabilité d'obtenir le résultat $(1, 1, 0)$? Et le résultat $(0, 1, 0)$?
2. On part de $(0, 0, 1)$ et on fait tourner le programme en boucle un million de fois. Quel résultat obtient-on ?
3. On a fait tourner le programme un million de fois, et le résultat est $(1, 1, 0)$. De quelle suite est-on parti ?

Correction de l'exercice 2

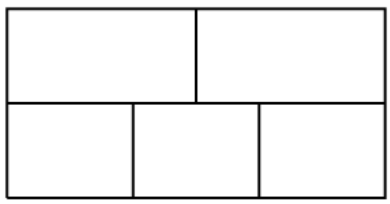
L'action du programme est représentée par le graphe suivant :



1. Le sommet $(1, 1, 0)$ a deux prédécesseurs sur les huit sommets de départ, d'où un probabilité de $\frac{1}{4}$ d'obtenir le résultat $(1, 1, 0)$.
   Le sommet $(0, 0, 1)$ n'a aucun prédécesseur, d'où une probabilité nulle d'obtenir le résultat $(0, 0, 1)$
2. Après avoir fait fonctionner le programme une fois, le résultat est $(0, 1, 1)$ et le sommet $(0, 1, 1)$ appartient a un circuit à 3 sommets. De plus $1000000 = 3 \times 333333 + 1$ ou encore $1000000 \equiv 1 \quad [3]$ donc le résultat sera $(0, 1, 1)$.
3. Le sommet $(0, 1, 1)$ appartient a un circuit à 3 sommets.
   D'autre part, sachant que $1000000 \equiv 1 \quad [3]$ et que les seuls prédécesseurs de $(1, 1, 0)$ sont $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$, on est obligatoirement parti d'un de ces deux sommets, d'où les deux possibilités de suites de départ.

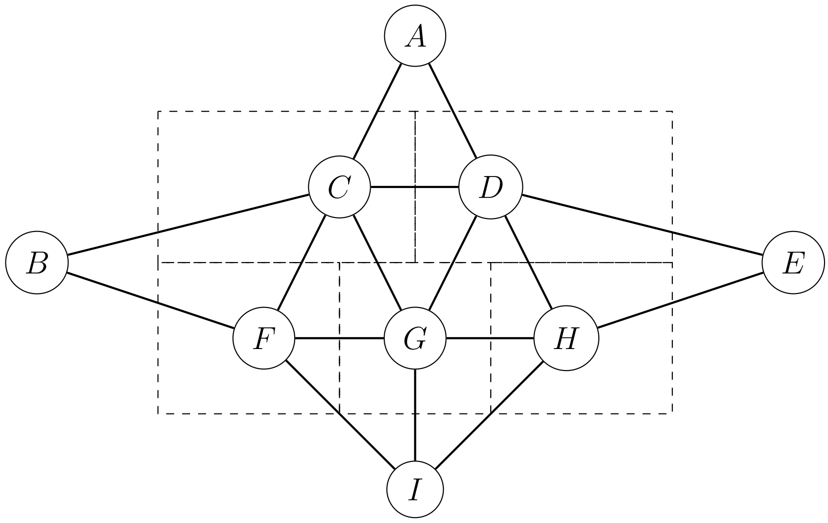
Exercice 3

Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante une et une seule fois ?



Correction de l'exercice 3

On peut peut représenter cette ce problème à l'aide d'un graphe à graphe à 9 sommets et 16 arêtes où chaque sommet représente une des 9 zones de la figure, et chaque arête un des 16 segment comme dans le graphe ci-dessous :



La question est donc de savoir si ce graphe est semi-eulérien.
Dans ce graphe, il y a 4 sommets ayant des degrés impairs, les sommets C, D, G et I. Par conséquent, ce graphe n'est pas semi-eulérien.
On ne peut donc pas tracer une courbe qui coupe chacun des 16 segments de la figure une et une seule fois, sans lever le crayon.

Exercice 4

Montrer qu'un graphe simple non orienté ayant au moins deux sommets contient deux sommets de même degré.

Correction de l'exercice 4

Soit $G(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe simple et $n \geqslant 2$ le nombre de ses sommets.
il y a n valeurs possibles pour le degré d'un sommet de G : $0, 1, ..., n-1$.
Supposons que tous les sommets sont de degrés différents, alors pour chaque i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$ on a un sommet v_i de degré i. Ceci est impossible.
En effet, considérons les sommets v_0 et v_{n-1}.
Puisque $0 \neq n-1$, ces sommets sont distincts. De plus : d'une part $v_0 v_{n-1}$ ne peut pas être une arête car v_0 n'est relié à aucun sommet, et d'autre part $v_0 v_{n-1}$ doit être une arête car v_{n-1} est relié à tous les sommets.

Exercice 5

Montrer que dans un arbre (non réduit à un seul sommet), il existe toujours des sommets de degré 1.

Correction de l'exercice 5

Démontrons cette proposition par l'absurde.
On suppose qu'il existe un arbre $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ n'ayant aucun sommet de degré 1.
Si G n'a que deux sommets, G étant un arbre, il a deux sommets de degré 1.
Soit $n+1$ l'ordre de G, avec $n \geqslant 2$ et s_0 un sommet de G.
G étant un arbre, il est connexe et aucun sommet n'a son degré égale à 0, donc

$$\forall s \in \mathcal{S}, \deg(s) \geqslant 2$$

Donc chaque sommet de $\mathcal{S}$ est incident à au moins deux arêtes distinctes. On construit donc par récurrence une chaîne de longueur n, $(s_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de sommets deux à deux distincts.

- **initialisation** pour $n = 2$
  Soit $s_0 \in \mathcal{S}$
  $\deg(s_0) \geqslant 2$ donc il existe $s_1 \in \mathcal{S}$ différent de s_0 tel que $\{s_0, s_1\} \in \mathcal{A}$.
  $\deg(s_1) \geqslant 2$ et G étant un arbre, il existe $s_2 \in \mathcal{S}$ différent de s_0 et de s_1 tel que $\{s_1, s_2\} \in \mathcal{A}$.
  (s_0, s_1, s_2) est donc une chaîne de sommets deux à deux distincts de longueur 2.
- **hérédité** Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$ avec $n \geqslant 3$.
  Supposons qu'il existe une chaîne de longueur i de sommets deux à deux distincts $(s_0, s_1, ..., s_i)$, donc $\{s_{i-1}, s_i\} \in \mathcal{A}$
  G étant un graphe et ne possédant donc aucun cycle simple, on a
  $$\forall k \in [\![0, i-2]\!], \{s_k, s_i\} \notin \mathcal{A}$$
  or $\deg(s_i) \geqslant 2$ et G est un arbre (donc sans cycle simple), donc il existe s_{i+1} distinct des sommets de la chaîne $(s_0, s_1, ..., s_i)$ tel que $\{s_i, s_{i+1}\} \in \mathcal{A}$, d'où l'existence d'une chaîne de longueur $i+1$ de sommets deux à deux distincts.
- **Conclusion**
  Il existe donc bien une chaîne de longueur n de sommets deux à deux distincts.

La chaîne $\mathcal{H}$ ainsi construite contient donc $n+1$ sommets distincts, elle passe donc par tous les sommets de G et c'est par conséquent une chaîne hamiltonienne.
D'autre part $\deg(s_0) \geqslant 2$ donc s_0 doit être relié via une arête à un autre sommet de G, ce qui est impossible car G est un arbre et par conséquent n'a pas de cycle simple, donc $\deg(s_0) = 1$, d'où la contradiction.
Donc dans un arbre (non réduit à un seul sommet), il existe toujours des sommets de degré 1.

Exercice 6

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe connexe non orienté.
Montrer que entre deux sommets quelconques du graphe, il existe une unique chaîne simple si et seulement si la suppression de n'importe quelle arête de $\mathcal{A}$ rend le graphe non connexe.

Correction de l'exercice 6

- Soit G un graphe connexe tel qu'entre deux sommet quelconque de G il existe une unique chaîne simple.
  En considérant l'arrête $\{x, y\}$ de G, x et y n'étant reliés que par une unique chaîne simple, le seul moyen d'aller de x à y est la chaîne composé de l'arête $\{x, y\}$. Donc si l'on supprime cette arête, il n'y a plus aucune chaîne permettant de relié x et y et par conséquent le graphe ne sera plus connexe.
- On démontre la réciproque par contraposition, c'est à dire que s'il existe deux sommets d'un graphe connexe $G\,(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ reliés par au moins deux chaînes distinctes, alors il existe une arête de $\mathcal{A}$ telle que sa suppression ne rendra pas le graphe non connexe.
  Soit D l'ensemble des paires de sommets de G reliés par au moins deux chaînes simples distinctes et supposons que D soit non vide.
  D étant non vide et fini, il existe une paire de sommets $\{x, y\}$ de D de distance minimale.
  Comme dans la démonstration $1 \Rightarrow 3$, on peut trouver deux chaînes simples c_1 et c_2 reliant

x et y n'ayant aucun sommet en commun à part x et y.
Soient v_1 et v_2 les deux voisins de y tels que les arêtes $\{v_1, y\} \in c_1$ et $\{v_2, y\} \in c_2$.
G étant connexe, on peut relié x à tout autre sommet de G. Si l'on supprime l'arête $\{v_1, y\}$ alors on obtient un graphe partiel G' dans lequel x reste relié a tous les sommets de G', en effet il reste relié à y avec la chaîne c_2 et à v_1 via la chaîne c_1 donc G' est connexe. d'où la conclusion.

Exercice 7

Montrer que dans un graphe, si la moyenne des degrés des sommets est supérieure ou égale à 2, alors il existe au moins un cycle.

Correction de l'exercice 7

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe tel que :

$$\frac{\sum_{x\in\mathcal{S}} \deg(x)}{\operatorname{card}(S)} \geqslant 2$$

G est décomposable en réunion disjointe de composantes connexes $(G_i = (\mathcal{S}_i, \mathcal{A}_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$, d'où :
$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{x\in\mathcal{S}_i} \deg(x)\right)}{\operatorname{card}(S)} \geqslant 2$
On a donc : $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} 2\operatorname{card}(A_i)}{\operatorname{card}(S)} \geqslant 2.$
d'où $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i)}{\operatorname{card}(S)} \geqslant 1.$
et par conséquent $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) \geqslant \operatorname{card}(S)$.
donc

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(S_i)$$

Si $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant n, \operatorname{card}(A_i) < \operatorname{card}(S_i)$ alors $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) < \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(S_i)$
d'où, il existe un entier naturel $k \in [1; n]$ tel que $\operatorname{card}(A_k) \geqslant \operatorname{card}(S_k)$.
par conséquent

$$\operatorname{card}(S_k) - \operatorname{card}(A_k) \leqslant 0$$

donc, $\operatorname{card}(S_k) \neq \operatorname{card}(A_k) + 1$ et par conséquent, G_k est un graphe connexe qui n'est pas un arbre, il possède donc au moins un cycle simple.

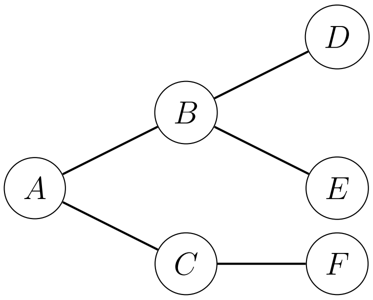
Exercice 8

Soit G un arbre à n sommets et m arêtes avec $n \geqslant 2$.

1. Dessiner un exemple d'arbre avec $n = 6$ sommets.
2. Rappeler la relation qui existe entre n et m.
3. On suppose de plus que tous les sommets de G sont de degré inférieur ou égal à trois. Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on note alors n_k le nombre de sommets de degré k. En utilisant la réponse à la question précédente ainsi qu'une autre relation vue en cours, démontrer que $n_1 = n_3 + 2$.

Correction de l'exercice 8

Soit $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un arbre à n sommets et m arêtes.

1. 

2. G étant un arbre, on a le nombre n de sommet qui est égale au nombre d'arêtes $+1$, d'où :
$$\boxed{n - m = 1}.$$

3. On a $\sum_{s\in\mathcal{S}} \deg(s) = 2\mathrm{card}(\mathcal{A})$, d'où $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 2m$
de plus $n - m = 1$, donc $m = n - 1 = n_1 + n_2 + n_3 - 1$
Par conséquent :
$$\begin{array}{rcl} n_1 + 2n_2 + 3n_3 & = & 2(n_1 + n_2 + n_3 - 1) \\ 0 & = & n_1 - n_3 - 2 \\ n_3 + 2 & = & n_1 \end{array}$$
.

Exercice 9

[Un problème à 25 dollars]

Le taquin est un jeu solitaire en forme de damier créé vers 1870 aux États-Unis. Il est composé de 15 petits carreaux numérotés de 1 à 15 qui glissent dans un cadre prévu pour 16. Peut-on remettre dans l'ordre les carreaux à partir de la configuration suivante, ou les numéros 14 et 15 ont été inversés ?

1. Montrer que le graphe du taquin, où chaque sommet représente une configuration possible, et chaque arête représente un mouvement élémentaire (glissage d'un carreau voisin sur la case vide), est biparti.
2. Montrer que le graphe des permutations, où chaque sommet représente une configuration possible, et chaque arête représente un échange entre deux cases quelconques, est lui aussi biparti.
3. Conclure.

Correction de l'exercice 9

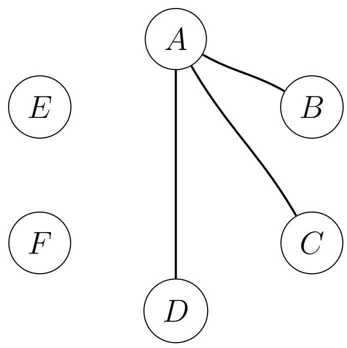
1. On considère un sommet du graphe G associé au jeu du taquin, c'est à dire une configuration possible. Chaque case de la configuration peut être repérée par sa ligne l et sa colonne c.
   Pour chaque sommet du graphe, si la somme de la ligne l et de la colonne c de la case vide est paire, alors on associe 0 au sommet, sinon, on lui associe 1.
   Pour passer d'un sommet de G à un autre, on peut soit ajouter ou soustraire 1 à la ligne l de la case vide, soit ajouter ou soustraire 1 à la colonne. Dans chacun des cas, on change la parité de $l+c$ associé au sommet de G ET par conséquent chaque arrête relie un sommet associé à 0 à un sommet associé à 1.
   On a donc réalisé une coloration de G à l'aide de deux couleurs et par conséquent G est biparti.
2.

Exercice 10

Montrer que dans un groupe formé de 6 personnes, il y a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas. (On suppose que si A connaît B, alors B connaît également A)
Montrer que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de 5 personnes.

Correction de l'exercice 10

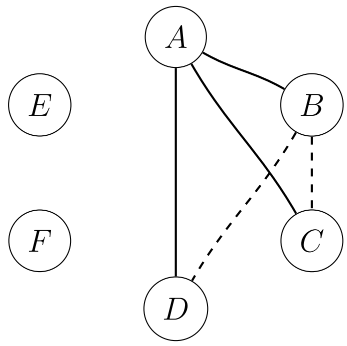
En construisant le graphe des connaissances où les six personnes sont représentées par les sommets qui sont reliés par une arête pleine lorsque les personnes se connaissent et par une arête en pointillé dans le cas contraire. On obtient donc un graphe **complet** dont, soit les arêtes sont pleines, soit elles sont en pointillés.
Le degré de chaque sommet est donc de 5. On a donc au moins 3 arrêtes partant de A qui sont du même style.
Supposons qu'elles soit pleines, c'est à dire que A connaît au moins 3 personnes B, C et D et considérons la clique (Une clique étant un sous graphe complet) $\{A, B, C, D\}$.



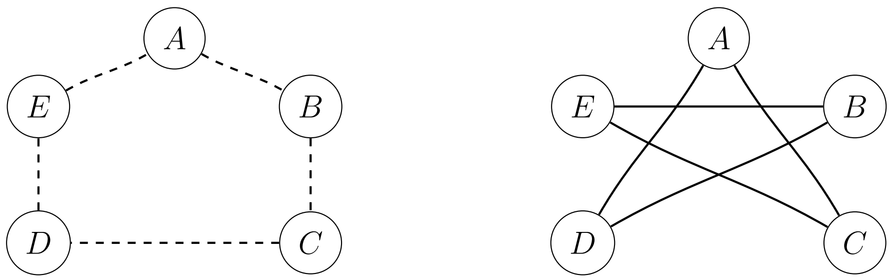
dans cette clique, le degré de chaque sommet est 3.
Concentrons nous maintenant sur la clique $\{B, C, D\}$. Dans cette clique, le degré de chaque sommet est de deux et il y a trois arêtes au total.

- Si elles sont toutes en pointillé, alors il y a au moins trois personnes dans le groupe qui ne se connaissent pas.
- Si elles ne sont pas toutes en pointillés, alors il y en a au moins une qui est pleine et par conséquent il y a au moins 3 personnes qui se connaissent mutuellement.

D'où la conclusion



Par contre, dans un graphe complet d'ordre 5, on peut trouver deux graphes partiels complémentaire sans clique d'ordre 3.

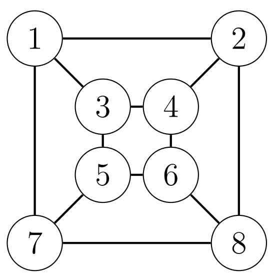


Exercice 11

Correction de l'exercice 11

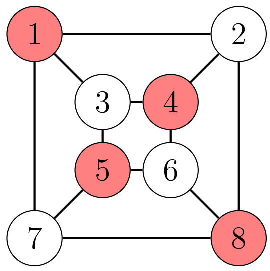
Exercice 12

Montrer que le graphe suivant est biparti.



Correction de l'exercice 12

C'est en fait un problème de coloration où seulement deux couleurs nécessaires.



Exercice 13

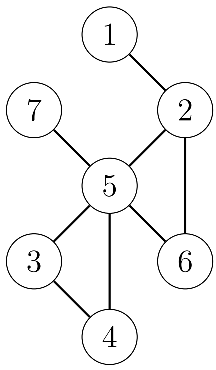
Soit G un graphe d'ordre 7 dont la matrice d'adjacence M est donnée ci-contre.
Ce graphe représente les 7 banc d'un parc relié entre eux par des allées permettant de passer de l'un à l'autre.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On veut peindre les bancs de manière que deux banc reliés par une allée soient de couleurs différentes. Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires.
2. Est-il possible de parcourir toutes les allées sans passer deux fois par la même allée ?
3. Est-il possible possible de parcourir toutes les allée en passant à coté de chaque banc une et une seule fois ?

Correction de l'exercice 13

M étant une matrice symétrique, le graphe G peut être considéré comme non orienté :



1. On a $\omega(G) \leqslant \chi(G)\Delta(G) + 1$
   D'où $3 \leq \chi(G) \leqslant 6$
2. Ce graphe a trois sommets de degré impair, il n'est donc pas semi eulérien et par conséquent, on ne pourra pas parcourir toutes les allées sans passer deux fois par la même allée.
3. La question est de savoir si le graphe ci-dessus est hamiltonien.

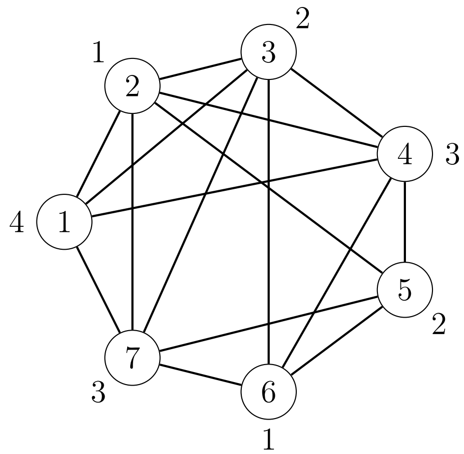
G n'est pas non plus hamiltonien, quelque soit le trajet les bancs de départ doivent être les bancs 1 et 7, et il faudra repasser près du banc 5 si l'on veut passer par tous les bancs.

Exercice 14

Un lycée doit organiser un examen composé de 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numéroté de 1 à 7, sachant que les paires de cours suivantes ont des étudiants en communs : $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{1;7\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{2;7\}$, $\{3;4\}$, $\{3;6\}$, $\{3;7\}$, $\{4;5\}$, $\{4;6\}$, $\{5;6\}$, $\{5;7\}$ et $\{6;7\}$.
Comment organiser ces épreuves sur une durée minimale ?

Correction de l'exercice 14

En appliquant l'algorithme de coloration DSATUR au graphe d'incompatibilité suivant donné par l'énoncé, on obtient le résultat décrit ci-dessous :

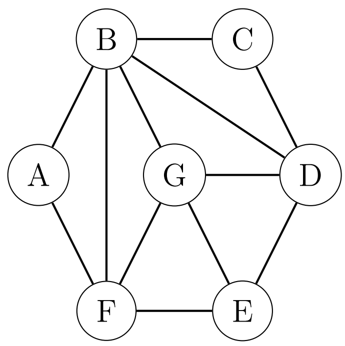


D'autre part, on remarque que les sommets 1, 2, 3 et 4 forment une clique, donc l'indice chromatique du graphe est supérieur ou égale à 4. L'organisation sur 4 créneaux qui suit est donc optimale.

	créneau 1	créneau 2	créneau 3	créneau 4
épreuves	2 et 6	3 et 5	4 et 7	1

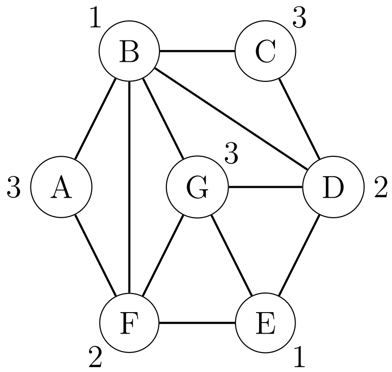
Exercice 15

Appliquer l'algorithme DSATUR au graphe suivant.
Le nombre de couleur donné par l'algorithme DSATUR correspond-t-il au nombre chromatique du graphe ?



L'Algorithme DSATUR donne la coloration suivante :

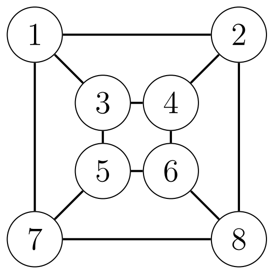
Correction de l'exercice 15



L'algorithme DSATUR a donc donner un résultat à l'aide de trois couleurs, or, dans ce graphe, l'ordre de la plus grande clique est $\omega(G) = 3$, donc le DSATUR a bien donner un nombre de couleurs correspondant au nombre chromatique $\chi(G) = 3$.

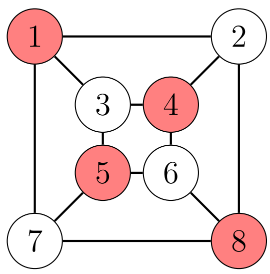
Exercice 16

Montrer que le graphe suivant est biparti.



Correction de l'exercice 16

C'est en fait un problème de coloration où seulement deux couleurs nécessaires.



Exercice 17

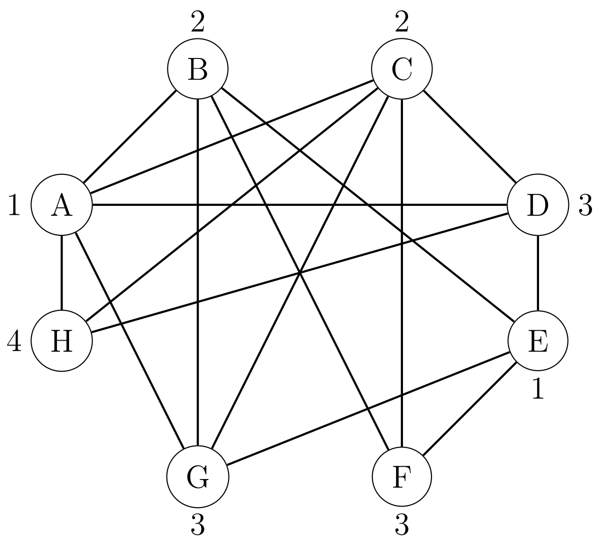
On veut transporter des produits chimiques noté A, B, C, D, E, F, G et H par le train. Le tableau ci-dessous indique donne les incompatibilités des produits (mélange explosif ...). En cas d'incompatibilité, les produit ne peuvent pas être entreposé dans le même wagon.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Quel est le nombre minimal de wagon nécessaire pour transporter ces produits ?

Correction de l'exercice 17

L'algorithme DSATUR appliqué au graphe d'incompatibilité décrit par l'énoncé donne la coloration décrite ci-dessous :

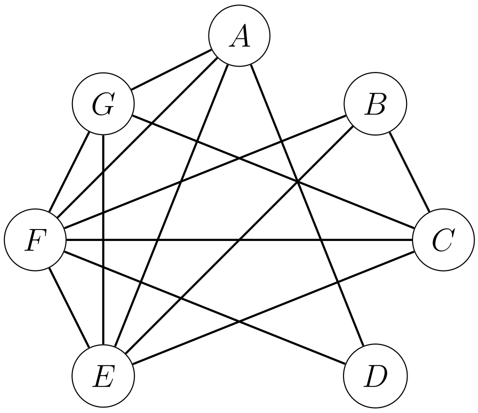


D'autre part, les sommets A, C, D, H forme un clique d'ordre 4 dont le nombre chromatique de ce graphe est supérieur ou égale à 4.
Le nombre minimal de wagons est donc 4 avec l'organisation suivante :

	wagon 1	wagon 2	wagon 3	wagon 4
Produits	A et E	B et C	D, F et G	H

Exercice 18

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe G ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.

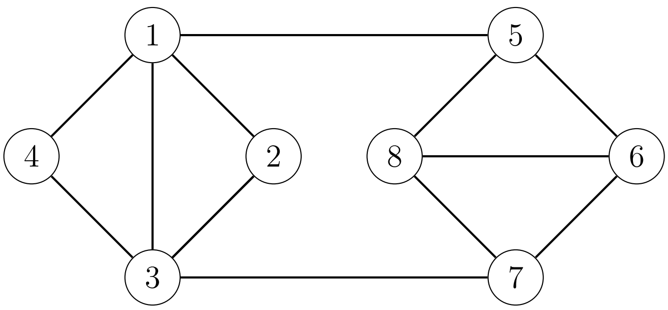


1. Déterminer la matrice associée au graphe G (les sommets de G étant classés dans l'ordre alphabétique).
2. Quelle est la nature du sous-graphe de G constitué des sommets A, E, F et G ? Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique c(G) du graphe G ?
3. Quel est le sommet de plus haut degré de G ? En déduire un encadrement de c(G) .
4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de G par ordre de degré décroissant, colorier le graphe G.
5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

Correction de l'exercice 18

Exercice 19

Soit le graphe G représenté ci-dessous :

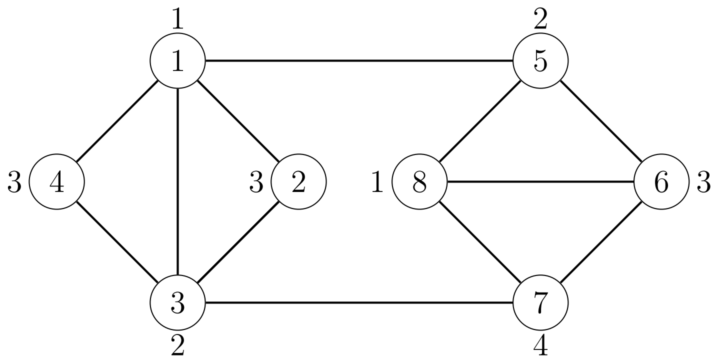


1. Donner un encadrement du nombre chromatique $\chi(G)$
2. Appliquer l'algorithme DSATUR pour colorer le graphe G.
3. Colorier le graphe avec seulement 3 couleurs.

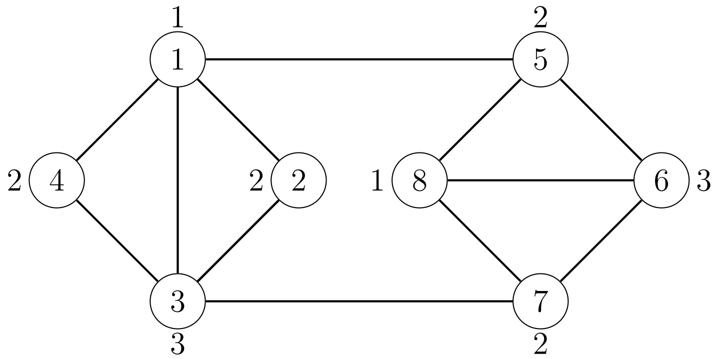
L'algorithme DSATUR est un algorithme étant classé parmi les heuristiques il ne fournit pas forcement une solution optimale. DSATUR produit donc en temps polynomial une solution réalisable. Son auteur a montré qu'il était capable de fournir en un temps court (relativement aux autres heuristiques et aux méthodes exactes) une coloration optimale dans plus de 90 % des cas.

Correction de l'exercice 19

1. $w(G) = 3$ et $\Delta(G) = 4$ donc $3 \leqslant \chi(G) \leqslant 5$
2. En appliquant DSATUR, on obtient la coloration à l'aide de 4 couleurs suivantes :



3. La coloration suivante est faite à l'aide de trois couleurs



Exercice 20

Pendant une soirée au château de Moulinsart, au cours de laquelle plusieurs visiteurs se sont succédés à différents horaires, Bianca Castafiore s'est fait voler un précieux coffre à bijoux... Le voleur a subtilisé discrètement la clef de la chambre de la Castafiore (qui se trouvait dans une poche de son manteau posé au salon), il s'est absenté pour commettre le délit et il est revenu dans le salon pour remettre la clef à sa place. Tintin, qui tente de faire la lumière sur cette affaire, contacte le lendemain tous les invités, et tous lui affirment ne jamais avoir quitté le salon pendant la durée de leur visite. Il leur demande enfin qui ils avaient rencontré au salon, et note leurs réponses :

- Tournesol a vu Dupond, Dupont, Irma et Lampion,
- Dupond a vu Tournesol, Dupont, Haddock, Irma et Nestor,
- Dupont a vu Tournesol, Dupond et Haddock,
- Haddock a vu Dupond, Dupont et Irma,
- Irma a vu Tournesol, Dupond, Haddock et Nestor,
- Lampion a vu Tournesol et Nestor,
- Nestor a vu Dupond, Irma et Lampion.

Muni de ces informations, Tintin pourra-t-il démasquer le coupable ?

1. Quel algorithme peut-on utiliser pour savoir s'il y a un menteur dans le groupe.
2. Déterminer le coupable.

Correction de l'exercice 20

Exercice 21

Cet exercice est inspiré de la nouvelle de Claude Berge Qui a tué le Duc de Densmore (Bibliothèque Oulipienne , Réédition Castor Astral, 2000). Dans cette nouvelle policière, le lecteur peut découvrir le meurtrier grâce à un théorème combinatoire dû au mathématicien hongrois . Hajós.
Un jour, Sherlock Holmes recoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans.
A l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.
Holmes : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !
Watson : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.
Holmes : Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?
Watson : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :

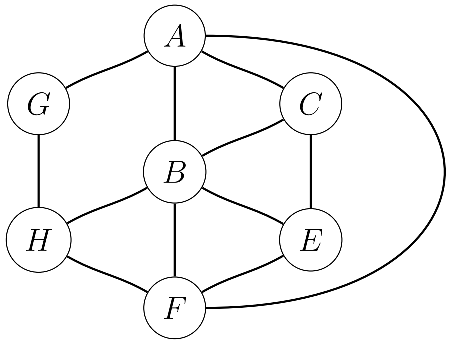
- Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.
- Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.
- Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.
- Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.
- Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.
- Georgia a rencontré Ann et Helen.
- Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.

Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes !
C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqué A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :
- Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine l'assassin. Qui est l'assassin ?

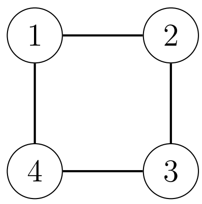
1. Quel algorithme peut-on utiliser pour savoir s'il y a un menteur dans le groupe.
2. Déterminer l'assassin.

Correction de l'exercice 21

Le graphe des rencontres est le suivant :



Pour découvrir laquelle des ces 7 femmes est venue plus d'une fois au château, il faut trouver des cycles de plus de quatre sommets sans raccourci (Ce que l'on appelle raccourci est une arête qui relie deux sommets non successifs du cycle.) comme ci-dessous :



En effet, un tel carré sans raccourci indique que l'une des quatre suspectes est forcément venue plus d'une fois au château.
On trouve 3 tel cycles dans le graphe d'Holmes qui sont : $\{A, B, H, G\}, \{A, C, E, F\}$ et $\{A, F, H, G\}$
Le seul sommet en commun dans ces trois cycle est A, donc Ann est venue plus d'une fois au château. C'est donc la coupable.

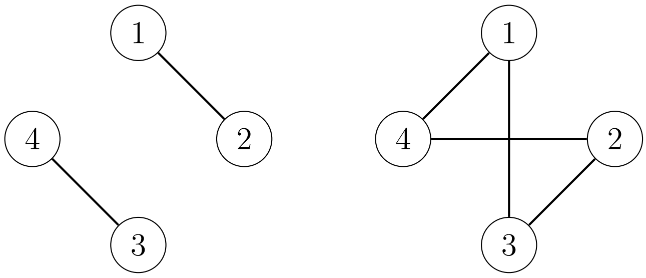
Exercice 22

L'institut Pasteur possède des milliers de candidats vaccins en cours d'expérimentation, qui doivent tous être conservés dans différents intervalles de températures très basses $[v_i^{min}, v_i^{max}]$ (où i est le numéro du vaccin). Chaque congélateur dont dispose l'institut doit être réglé à une température T_k bien précise (où k est le numéro du congélateur), et pour économiser l'énergie, on cherche à conserver tous les vaccins en faisant fonctionner le moins de congélateurs possibles.
Modéliser le problème, et proposer un algorithme pour planifier la conservation.

Correction de l'exercice 22

Si l'on veut appliquer un algorithme de coloration où le nombre de congélateurs correspondra au nombre de couleurs utilisé, on doit utiliser un graphe d'incompatibilité.
Chaque sommet du graphe $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ représentera un vaccin et deux sommets i et j seront relié par une arête si $\left[v_i^{min}, v_i^{max}\right] \cap \left[v_j^{min}, v_j^{max}\right] = \emptyset$.
On pourra ensuite utiliser l'algorithme DSATUR. Néanmoins, ce dernier peut donner un nombre de couleur supérieur au nombre chromatique.
Si le graphe est cordal, l'algorithme DSATUR donnera un nombre de couleur égale au nombre chromatique, mais cela n'a été ni vu ni démontrer dans ce cours, néanmoins un algorithme d'élimination parfait donnera aussi un nombre de couleur égale au nombre chromatique.
La question de savoir si le graphe obtenu est cordal ou non est donc légitime.

Le graphe complémentaire de G est le graphe où deux sommets sont reliés si l'intersection de leur intervalles de conservation n'est pas l'ensemble vide, c'est donc un graphe d'intervalles et par conséquent un graphe cordal.
Le complémentaire d'un graphe cordal est-il un graphe cordal ?
La réponse est non comme le montre l'exemple suivant.



Graphe Cordal   Graphe non cordal, (1, 4, 3, 2, 1) est un cycle sans corde

Exercice 23

On dispose de 7 euros stockés sous la forme de 3 types de jetons, de valeur 1, 2 et 5 euros. On a donc six configurations possibles

$$A = (1)(1)(1)(1)(1)(1)(1), \quad B = (2)(1)(1)(1)(1)(1), \quad etc...$$

Une machine permet de faire trois types d'échanges, dans les deux sens, symbolisés par les doubles flèches :

$$(1)(1) \leftrightarrow (2) \quad ; \quad (1)(1)(1)(1)(1) \leftrightarrow (5) \quad ; \quad (2)(2)(1) \leftrightarrow (5)$$

1. Compléter les six configurations ($C = ..., D = ..., E = ..., F = ...$) et dessiner le graphe de sommets A, B, C, D, E, F représentant toutes les transitions possibles (par un échange avec la machine).
2. Montrer que ce graphe est biparti.
3. En partant de la configuration A, est-il possible de revenir à A après 999 échanges ?
4. (BONUS) Même question en considérant que l'on dispose de N euros, avec $N \geq 5$.

Correction de l'exercice 23

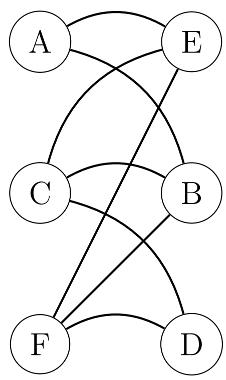
On dispose de 7 euros stockés sous la forme de 3 types de jetons, de valeur 1, 2 et 5 euros. On a donc six configurations possibles

$$A = (1)(1)(1)(1)(1)(1)(1), \quad B = (2)(1)(1)(1)(1)(1), \quad etc...$$

Une machine permet de faire trois types d'échanges, dans les deux sens, symbolisés par les doubles flèches :

$$(1)(1) \leftrightarrow (2) \quad ; \quad (1)(1)(1)(1)(1) \leftrightarrow (5) \quad ; \quad (2)(2)(1) \leftrightarrow (5)$$

1. $A = (1)(1)(1)(1)(1)(1)(1)$, $B = (2)(1)(1)(1)(1)(1)$, $C = (2)(2)(1)(1)(1)$, $D = (2)(2)(2)(1)$, $E = (5)(1)(1)$, $F = (5)(2)$



2. On peut colorer ce graphe a l'aide de deux couleurs, la couleur 1 étant associée au sommets A, C et E et la couleur 2 étant associée aux sommets F, B et D, $\boxed{\text{donc ce graphe est biparti}}$.
3. Le graphe étant biparti, il n'existe pas de cycle de longueur impaire, il ne sera donc pas possible de revenir au sommet après 999 échanges.
4. (BONUS)
A chaque sommet du graphe, on associe la parité de la somme des nombres de pièce de 2 euros et de 5 euros, dans ce cas, chaque échange modifiera cette parité. En effet, chacune des transformation (1)(1) $\leftrightarrow$ (2), (1)(1)(1)(1)(1) $\leftrightarrow$ (5) et (2)(2)(1) $\leftrightarrow$ (5) ajoutera $+1$ où -1 à la somme des nombres de pièce de 2 et de 5 euros et par conséquent modifiera sa parité.
On a donc ainsi coloré le graphe à l'aide de deux couleurs. Ce dernier est donc biparti et par conséquent n'a aucun cycle de longueur impaire. Il ne sera donc pas possible de revenir à la configuration A après 999 échanges.

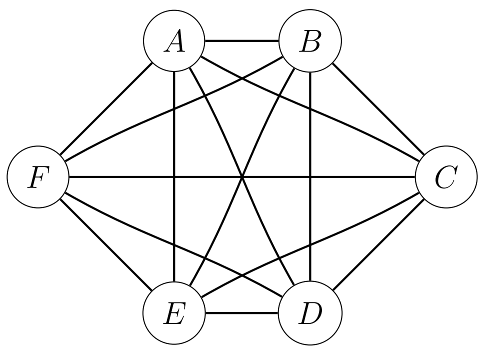
Exercice 24

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueurs doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Quel type de graphe obtenez vous ?
3. Proposez un calendrier des matches.

Correction de l'exercice 24

1. Avec les 6 joueurs noté A, B, C, D, E et F, le graphe de toutes les parties possibles est le suivant, où chaque arête représente une partie.



2. On obtient un graphe complet
3. Il faudra 5 jours pour ce tournoi dont un planning possible est ci-dessous :

Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
A et B	B et C	A et C	B et D	A et D
C et D	D et E	D et F	A et E	B et F
E et F	A et F	B et E	C et F	C et E

Exercice 25

Exprimer la résolution d'un Sudoku classique en terme de coloration de graphe. Décrivez le graphe (nombre de sommet, nombres d'arêtes, ...)
Combien faut-il de couleurs ?

Correction de l'exercice 25

On peut représenter la situation d'un sudoku à l'aide d'un graphe de 81 sommets où chaque sommet représente une case, deux sommets étant reliés s'ils ne peuvent pas avoir le même numéro. Autrement dit, chaque sommet est par conséquent relié aux 8 autres de sa ligne plus les 8 autres sommets de sa colonne et aux 8 autres de sa région sachant que 4 ont déjà été comptés, soit 20 autres sommets. $81 \times 20 = 1620$, donc la somme des degrés est de 1620 et par conséquent, d'après le lemme des poignées de mains, le nombre d'arêtes sera de 810.
Résoudre le sudoku revient a colorier le graphe à l'aide de 9 couleurs sachant que certains sommets sont déjà coloriés.
L'algorithme DSATUR pourrait donner une solution avec plus de 9 couleurs.
La question que l'on peut se poser est si ce graphe est cordal ou non. Pour cela, on peut utiliser un schéma d'élimination parfait. Sans utiliser un schéma d'élimination parfait, on peut facilement trouver un cycle de longueur 4 sans corde, par exemple le cycle $\big((1,1),(1,4),(4,4),(4,1)\big)$
Dans le cas ou il aurait été cordal, le schéma d'élimination parfait donne un ordre optimal pour l'algorithme de coloration.

Exercice 26

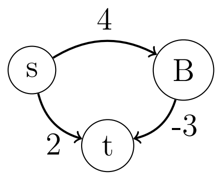
Soit G un réseau (graphe orienté valué) dont certains arcs ont un coût négatif, mais sans circuit négatif.

1. Illustrer grâce à un exemple le fait que l'algorithme de Dijkstra ne détecte pas toujours les plus courts chemins dans G.
2. Pour contourner le problème induit par les arcs négatifs, un étudiant propose l'idée suivante : « soit $-c \in \mathbb{R}$ le coût minimal dans G. Alors on rajoute $+c$ à tous les coûts : plus précisément, pour chaque arc (i, j), on pose $c(i, j) \leftarrow c(i, j) + c$. Ainsi tous les coûts sont maintenant positifs, et on peut appliquer Dijkstra pour calculer les plus courts chemins. » L'idée fonctionne-t-elle ? Si oui, le prouver. Si non, expliquer avec un exemple.

Correction de l'exercice 26

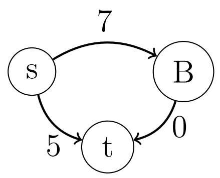
Soit G un réseau (graphe orienté valué) dont certains arcs ont un coût négatif, mais sans circuit négatif.

1. Le graphe ci-dessous ne contient pas de circuit négatif et pourtant, si l'on exécute l'algorithme de Dijkstra a partir du sommet s, on obtient un coût de 2 entre les sommets s et t alors que la distance de s à t est de 1



	s	B	t
étape 1	0	$+\infty$	$+\infty$
étape 2		4 - (A)	2 - (A)
étape 3		4 - (A)	

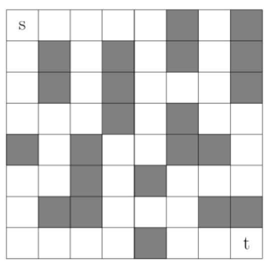
2. FAUX
   Dans l'exemple précédent, si l'on rajoute +3 à chaque arête, le graphe devient :



   Le plus court chemin dans ce dernier graphe pour relier s à t est le chemin (s, t) alors que le plus court chemin dans le graphe initial est (s, B, t)

Exercice 27

Les cases grisées de l'échiquier de la figure ci-dessous sont interdites. Le but du problème est de déplacer une tour de la case s à la case t sans passer sur les cases interdites (Rappel : une tour ne peut se déplacer qu ?horizontalement et verticalement, mais d ?un nombre de cases libre). L ?objectif est de trouver un chemin qui minimise le nombre de cases visitées (on entend par cases visitées les cases sur lesquelles se pose la tour dans son déplacement se s à t).

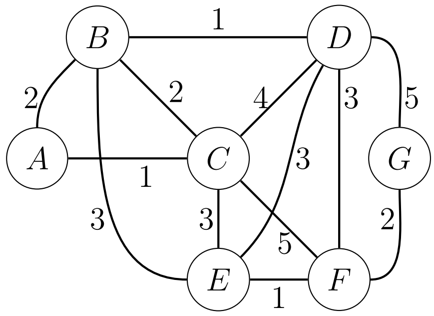


1. Formuler ce problème comme un problème de plus courts chemins (expliquer votre méthode pour construire le graphe correspondant).
2. En déduire un chemin de longueur minimale en nombre de déplacements que doit suivre la tour pour atteindre la case t à partir de la case s.

Correction de l'exercice 27

Exercice 28

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville.
Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques.
Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Partie I

1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :
   (a) Ce graphe est-il connexe ?
   (b) Ce graphe est-il complet ?
   (c) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
   (d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?
2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

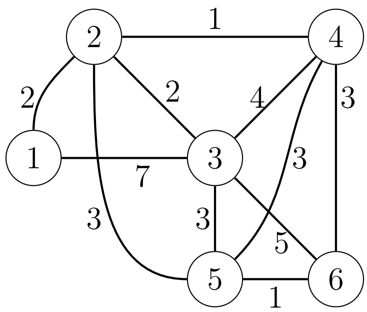
Partie II

1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour donner les plus courtes distances du sommet A aux autres sommets.
2. En déduire le chemin le plus court du sommet A au sommet G.

Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G. La réponse sera justifiée par un algorithme.

Correction de l'exercice 28

Exercice 29

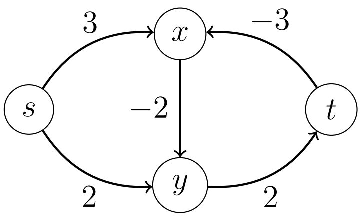


1. Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall au graphe précédent.
2. Déterminer le sommet au "centre" du graphe, c'est à dire le sommet s minimisant la somme des distances de s aux autres sommets.

Correction de l'exercice 29

Exercice 30

Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford sur le réseau ci-dessous, à partir du sommet s. Vérifier que l'algorithme détecte la présence d'un circuit absorbant.



Correction de l'exercice 30

Exercice 31

[algorithme de Sedgewick-Vitter]

Nous avons vu en cours que pour calculer le plus court chemin entre deux sommets fixés s et t, il n'existait pas d'algorithme plus efficace que Dijkstra, qui calcule tous les plus courts chemins d'origine s. Ceci est vrai dans le cas général, mais il existe cependant des cas particuliers où l'on peut améliorer la recherche d'un plus court chemin à destination fixée... Un *graphe euclidien* est un graphe non orienté dont les sommets sont des points d'un espace euclidien, et le coûts de chaque arête est égale à la longueur de l'arête :

$$c(x, y) := \|y - x\|.$$

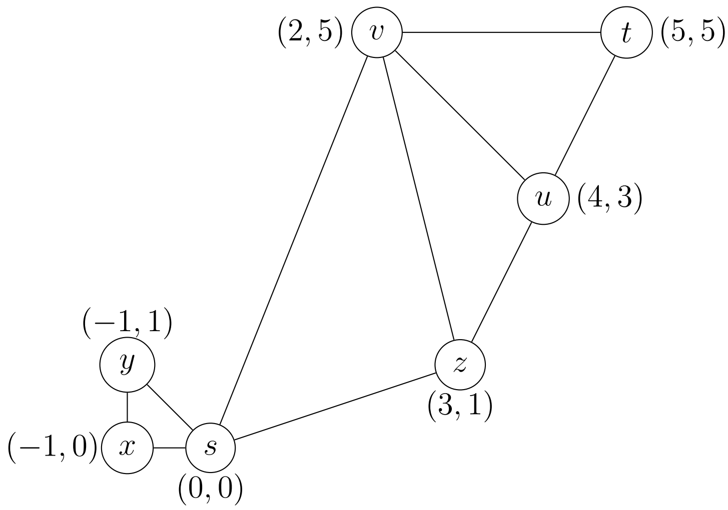
On rappelle que l'algorithme de Dijkstra visite les sommets x dans l'ordre croissant de $d(x)$. L'algorithme de Sedgewick-Vitter est une variante qui permet de calculer plus rapidement le plus court chemin vers un sommet t fixé. Pour cela, on visite les sommets x dans l'ordre croissant de $d(x) + \|t - x\|$. Plus précisément, on remplace la ligne

"trouver un sommet x de L tel que $d(x)$ soit minimal"

dans l'algorithme de Dijkstra par :

"trouver un sommet x de L tel que $d(x) + \|t - x\|$ soit minimal".

Montrer la correction de l'algorithme : à chaque étape, le sommet x selectionné est tel que $d(x)$ soit optimale. Puis, comparer les algorithmes de Dijkstra et de Sedgewick-Vitter pour le calcul du plus court chemin de s à t dans le graphe du plan euclidien ci-après. (On a indiqué les coordonnées des sommets dans un repère orthonormé.)



Correction de l'exercice 31

Exercice 32

On considère un réseau de télécommunication, composé d'émetteurs-récepteurs pouvant s'envoyer des messages, avec une certaine fiabilité.
On modélise ce réseau à l'aide d'un graphe orienté et valué, où chaque sommet représente un émetteur-récepteur, chaque arc (x, y) indique la possibilité d'une transmission de x à y, et la valuation $p(x, y)$ indique la probabilité pour que la communication se passe sans problème de x à y.

1. Comment calculer la *fiabilité* d'un chemin $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire la probabilité qu'un message soit bien transmis de x_1 à x_n par l'intermédiaire de ce chemin ?
2. Montrer que la recherche d'un chemin de fiabilité maximale entre deux sommets peut se rapporter à un problème de plus court chemin (indice : utiliser une fonction qui transforme les produits en sommes).

Correction de l'exercice 32

1. Pour tout arc (x, y) du graphe, on considère l'événement (x, y) : "Le message est transmis de l'émetteur x au récepteur y".
   On peut raisonnablement considéré que ces événements sont mutuellement indépendants et par conséquent, la probabilité qu'un message soit transmis de s_1 à s_n via le chemin $(s_1, s_2, ..., s_n)$ est
   $$p\left((s_1, s_2) \cap (s_2, s_3) \cap ... \cap (s_{n-1}, s_n)\right) = \prod_{i=1}^{n-1} p(s_i, s_{i+1})$$
2. On peut changer la valuation de l'arc (x, y) par $\ln\left(\dfrac{1}{p(x, y)}\right)$, en vérifiant que pour toute arc (x, y), on ait $p(x, y) \neq 0$. Dans le cas contraire, on pourra utiliser une valuation égale à $+\infty$.
   Dans ce cas, un algorithme de plus court chemin entre les sommets s et t donnera le chemin $c_0 = (x_1, x_2, ..., x_m)$ de longueur minimale entre $s = x_1$ et $t = x_m$ dont la longueur

est :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \ln\left(\frac{1}{p(x_i,x_{i+1})}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{p(x_i,x_{i+1})}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{m-1} p(x_i,x_{i+1})}\right)$$

or la fonction exponentielle est strictement croissante donc le chemin donné par cet algorithme permet de minimiser $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{m-1} p(x_i,x_{i+1})}$ et par conséquent de maximiser $\prod_{i=1}^{m-1} p(x_i,x_{i+1})$, donc de maximiser la probabilité que le massage arrive.

Remarque

$\forall p \in]0;1], \quad \ln\left(\dfrac{1}{p}\right) \geqslant 0$, on pourra donc utiliser l'algorithme de Dijkstra pour obtenir ce plus court chemin.

Exercice 33

[chemin de capacité maximale]

On représente un réseau routier par un graphe orienté valué, dont la valuation de chaque arc $c(x,y)$ représente la *capacité de trafic* sur la route de x à y. On définit alors la capacité de trafic sur un chemin comme le minimum des capacités des arcs qui composent le chemin. Modifier l'algorithme de Dijkstra pour obtenir un algorithme qui calcule la capacité maximale des chemins d'origine s dans un réseau. Montrer la correction de ce nouvel algorithme.

Correction de l'exercice 33

Exercice 34

On considère un système de contraintes :

$$x_j - x_i \leq w_{ij}, \quad x_i \leq w_i \quad (i,j = 1,...n). \tag{1}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 - x_2 & \leq & 3, & \quad & x_1 & \leq & 3, \\ x_2 - x_3 & \leq & -2, & & x_2 & \leq & 2, \\ x_3 - x_1 & \leq & 2. & & x_3 & \leq & 1. \end{array} \tag{2}$$

On associe à ce système un *graphe de contrainte*, ayant un sommet pour chaque variable x_i et un arc (x_i, x_j) de coût w_{ij} pour chaque contrainte $x_j - x_i \leq w_{ij}$. On ajoute à ce graphe un sommet source s, relié à chaque autre sommet par un arc (s, x_i) de coût w_i.

1. Dessiner le graphe de contrainte correspondant au système 2 donné en exemple.
2. Résoudre le système 2 grâce à l'algorithme de Bellman-Ford.
3. Montrer qu'en toute généralité, le système de contraintes 1 admet des solutions si et seulement si le graphe de contrainte associé ne possède pas de circuit négatif.

Correction de l'exercice 34

Exercice 35

Dans un réseau (graphe orienté valué), on note $d(i,j)$ le coût d'un plus court chemin allant du sommet i au sommet j, et on pose $d(i,j) = +\infty$ s'il n'existe pas de chemin de i à j.

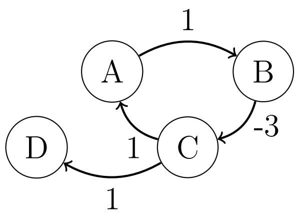
1. Est-il possible qu'il existe un chemin de i à j, mais pas de plus court chemin ? Justifier.
2. Étant donné trois sommets i, j, k, quelle inégalité relie $d(i,j)$, $d(i,k)$ et $d(k,j)$?
3. En cours d'exécution de l'algorithme de Floyd-Warshall sur un réseau à quatre sommets, on obtient la matrice

$$D = (d(i,j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 & 1 & 7 \\ +\infty & 0 & 3 & -1 & 1 \\ +\infty & +\infty & 0 & 2 & 4 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 & 4 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme est-il terminé, ou peut-on encore améliorer certaines entrées de la matrice ? Justifier.

Correction de l'exercice 35

1. Dans un graphe valué $G(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, s'il existe un circuit absorbant, c'est à dire un circuit à coût négatif, alors il existe au moins une paire de sommets sans plus court chemin pour aller de l'un a l'autre comme dans l'exemple suivant où il n'existe pas de plus court chemin pour aller de A à D.



2. Étant donné trois sommets i, j, k, on a : $\boxed{d(i,j) \leqslant d(i,k) + d(k,j)}$
3. L'algorithme n'est pas terminé, peut-on encore améliorer certaines entrée de la matrice. En effet : $d(1,4) + d(4,5) = 1 + 4 = 5$ et $d(1,5) = 7$ d'où $d(1,4) + d(4,5) \leqslant d(1,5)$
On $\boxed{\text{peut donc améliorer } d(1,5)}$.

Exercice 36

Répondre par `vrai` ou `faux` aux quatre affirmations suivantes. Justifier la réponse par une courte preuve (si `vrai`) ou un contre-exemple (si `faux`). On se place dans un graphe orienté valué...

1. S'il existe un plus court chemin entre deux sommets s et t, alors celui-ci est unique.
2. S'il existe un plus court chemin entre deux sommets s et t, alors il est élémentaire (il ne passe pas deux fois par le même sommet).

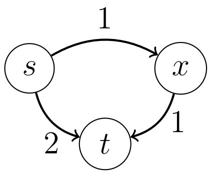
Pour les deux questions suivantes, on suppose que α est un chemin de s_0 à s_1, et β est un chemin de s_1 à s_2. On note $\alpha\beta$ le chemin de s_0 à s_2 obtenu en parcourant le chemin α suivi du chemin

β.

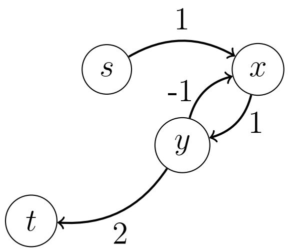
3. Si α et β sont des plus courts chemins, alors $\alpha\beta$ est un plus court chemin.
4. Si $\alpha\beta$ est un plus court chemin, alors α et β sont des plus courts chemins.

Correction de l'exercice 36

1. FAUX.
   Dans le graphe ci-dessous, il existe deux plus courts chemins pour aller de s à t, le chemin (s, x, t) et le chemin (s, t).

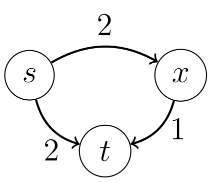
   

2. FAUX. Dans le graphe ci-dessous, il existe un plus courts chemins pour aller de s à t qui n'est pas élémentaire, le chemin (s, x, y, x, y, t).

   Néanmoins, si le coût de chaque arc est strictement positif, la proposition est VRAI.
   On fait une démonstration par contraposition.
   Supposons qu'il existe un plus court chemin qui ne soit pas élémentaire entre les sommets s et t d'un graphe G. Dans ce cas, il existe au moins un sommet x tel que le chemin passe deux fois par ce sommet.
   Soit $c = (s, s_1, ...s_m, x, x_1, ..., x_n, x, t_1, ..., t_p, t)$ ce chemin.
   Dans ce cas, $(x, x_1, ..., x_n, x)$ est un circuit à coût positifs, sinon il n'existerait pas de plus court chemin de s à t et par conséquent $(s, s_1, ...s_m, x, t_1, ..., t_p, t)$ est un chemin allant de s à t dont le coût est indérieur à celui de c. Donc c n'est pas le plus court chemin.
   Par conséquent, s'il existe un plus court chemin pour aller de s à t, alors celui-ci est élémentaire.

3. FAUX.
   Dans le graphe ci-dessous, (s, x) est le plus court chemin de s à x et (x, t) est le plus court chemin de x à t et pourtant (s, x, t) ,'est pas le plus court chemin de s à t.

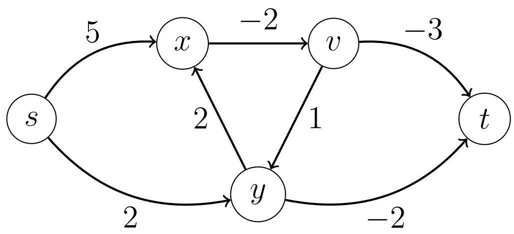
   

4. VRAI.
   On fait une démonstration par contraposition.
   Soient c_α, c_β et $c_{\alpha\beta}$ les coûts respectifs des chemin α, β et $\alpha\beta$.
   supposons que α et β ne soient pas les plus courts chemins pour aller de s_0 à s_1 et de s_1

à s_2.
On a donc $c_\alpha > d(s_0, s_1)$ ou $c_\beta > d(s_1, s_2)$ et par conséquent :
$c_\alpha + c_\beta > d(s_0, s_1) + d(s_1, s_2) > d(s_0, s_2)$
donc $c_{\alpha\beta} > d(s_0, s_2)$
Donc, dans ce cas $\alpha\beta$ n'est pas un plus court chemin.
Par conséquent, si $\alpha\beta$ est un plus court chemin, alors α et β sont les plus courts chemins.

Exercice 37

On considère le graphe orienté valué G ci-dessous.



1. Quel algorithme utiliseriez-vous pour trouver un plus court chemin de s à t ? Pourquoi ?
2. Décrire succinctement le principe de cet algorithme.
3. Exécuter l'algorithme et en déduire un plus court chemin de s à t.
4. D'après l'exécution de l'algorithme, qu'est-ce qui nous assure qu'il n'existe pas de circuit négatif dans le graphe G ? (autrement dit, que se passerait-il s'il existait un circuit négatif ?)

Correction de l'exercice 37

1. On utilisera l'algorithme de $\boxed{\text{Belmann-Ford}}$ étant donné qu'il existe des arcs avec des coût négatifs.
2. Dans cet algorithme, $n = \text{card}(\mathcal{S})$ désigne le nombre de sommets du réseau. On effectue $n - 1$ fois de suite un relâchement de l'ensemble des arcs (dans un ordre quelconque). Un $n^{\text{ième}}$ relâchement permettra de savoir s'il existe des circuits absorbants
3.

		s	x	y	v	t
	Initialisation	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$k=1$	relâche (s,x) 5	0	5 - s	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	relâche (s,y) 2	0	5 - s	2 - s	$+\infty$	$+\infty$
	relâche (x,v) -2	0	5 - s	2 - s	3 - x	$+\infty$
	relâche (y,x) 2	0	4 - y	2 - s	3 - x	$+\infty$
	relâche (y,t) -2	0	4 - y	2 - s	3 - x	0 - y
	relâche (v,y) 1	0	4 - y	2 - s	3 - x	0 - y
	relâche (v,t) -3	0	4 - y	2 - s	3 - x	0 - y
$k=2$	relâche (s,x) 5	0	4 - y	2 - s	3 - x	0 - y
	relâche (s,y) 2	0	4 - y	2 - s	3 - x	0 - y
	relâche (x,v) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	0 - y
	relâche (y,x) 2	0	4 - y	2 - s	2 - x	0 - y
	relâche (y,t) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	0 - y
	relâche (v,y) 1	0	4 - y	2 - s	2 - x	0 - y
	relâche (v,t) -3	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
$k=3$	relâche (s,x) 5	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (s,y) 2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (x,v) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (y,x) 2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (y,t) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (v,y) 1	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (v,t) -3	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
$k=4$	relâche (s,x) 5	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (s,y) 2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (x,v) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (y,x) 2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (y,t) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (v,y) 1	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (v,t) -3	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
$k=5$	relâche (s,x) 5	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (s,y) 2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (x,v) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (y,x) 2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (y,t) -2	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (v,y) 1	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v
	relâche (v,t) -3	0	4 - y	2 - s	2 - x	-1 - v

Le plus court chemin entre s et t est donc $\boxed{\text{le chemin } (s,y,x,v,t) \text{ et sont coût est } -1}$.

4. Il n'y a $\boxed{\text{aucune modification des plus courts chemins lors du cinquième relâchement}}$, ce qui nous assure qu'il n'existe pas de circuit négatif dans le graphe G.
   S'il existait un circuit négatif, on aurait eu une modification lors de ce cinquième relâchement, en effet, lorsque l'on utilise l'algorithme de Bellmann-Ford, les plus courts chemins, s'ils existent, sont obtenus après $n-1$ relâchements, donc si l'on peut encore réduire la longueur d'un chemin lors d'un $n^{\text{ième}}$ relâchement, c'est qu'il n'existe pas de plus court chemin.

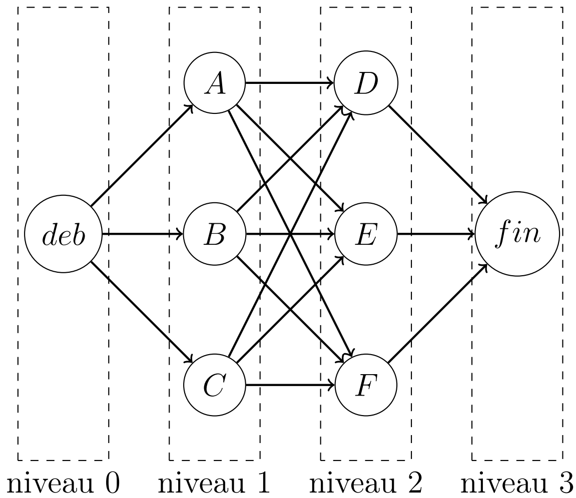
Exercice 38

On a 6 tâches A,B,C,D,E,F à réaliser. Pour être traitées, les tâches D,E,F nécessitent toutes les trois que A,B,C soient préalablement effectuées.

1. Tracer le graphe potentiels-tâches et le graphe potentiels-étapes (méthode PERT) du projet.
2. Lequel de ces graphes donne, selon vous, la représentation la plus visuellement lisible de l'enchaînement des tâches ?
3. On se rend compte, en cours de préparation du projet, que finalement la tâche D n'a pas besoin de l'antériorité de A pour pouvoir être traitée. Comment modifier les deux graphes ? Lequel est le plus flexible (i.e. peut être modifié le plus facilement) ?

Correction de l'exercice 38

1.
   (a) Graphe potentiels-tâches.



   (b) graphe potentiels-étapes

Exercice 39

On décompose un projet en différentes tâches A,B,...,N. On donne les contraintes de précédence ainsi que la durée de chaque tâche dans le tableau ci-dessous.

tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	F	6
B	-	9
C	B,G,I,N	7
D	E,F,J	5
E	K	6
F	-	7
G	J,K	2
H	K	5
I	A,L	3
J	B,H,M	4
K	-	3
L	F	8
M	F	3
N	A,L	4

1. Classer les tâches par niveaux et déterminer les tâches immédiatement antérieures.
2. Tracer le graphe potentiels-tâches du projet.
3. Calculer la date de début au plus tôt de chaque tâche, et la durée minimale du projet.
4. Calculer la date de début au plus tard et la marge de chaque tâche.
5. Déterminer le chemin critique.
6. Dans les 3 cas suivants, indiquer ce que devient la durée minimale du projet :
   - la durée de C passe à 11 jours ;
   - la durée de E passe à 11 jours ;
   - la durée de I passe à 11 jours.

Correction de l'exercice 39

Exercice 40

On décompose un projet en différentes tâches A,B,...,L. On donne les contraintes de précédence ainsi que la durée de chaque tâche dans le tableau ci-dessous.

tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	B	4
B	-	8
C	-	11
D	B	5
E	C	3
F	-	2
G	E,K	5
H	A,B,C	2
I	C,D,H,L	10
J	B,C,L	5
K	F	10
L	A,C	3

1. Classer les tâches par niveaux et déterminer les tâches immédiatement antérieures.
2. Tracer le graphe potentiels-tâches du projet.
3. Calculer la date de début au plus tôt de chaque tâche, et la durée minimale du projet.
4. Calculer la date de début au plus tard et la marge de chaque tâche.
5. Déterminer le chemin critique.
6. Dans les 3 cas suivants, indiquer ce que devient la durée minimale du projet :
   - la durée de E passe à 10 jours ;
   - la durée de L passe à 5 jours ;
   - la durée de G passe à 10 jours.

Correction de l'exercice 40

Exercice 41

Appliquer la méthode PERT au projet suivant.

tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	-	3
B	-	9
C	-	5
D	A	8
E	B	4
F	B	7
G	B	20
H	C,F	6
I	D,E	5

Correction de l'exercice 41

Exercice 42

On décompose un projet en différentes tâches A,B,C,D,E,F,G. On donne les contraintes de précédence ainsi que la durée de chaque tâche dans le tableau ci-dessous.

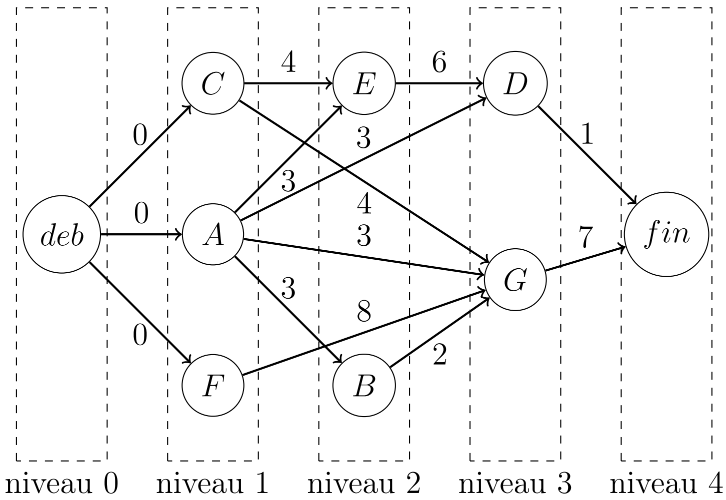
tâche	tâches antérieures	durée (jours)
A	-	3
B	A	2
C	-	4
D	A,E	1
E	A,C	6
F	-	8
G	A,B,C,F	7

1. Tracer le graphe potentiels-tâches du projet. On y fera apparaître le classement des tâches par niveaux.
2. Calculer la date de début au plus tôt de chaque tâche, et la durée minimale du projet.

3. Calculer la date de début au plus tard, et la marge de chaque tâche.
4. Déterminer le chemin critique.
5. Suite à un imprévu, on se voit dans l'obligation de faire un choix entre deux options : (1) rajouter 1 jour à la durée de la tâche E, ou (2) rajouter 5 jours à la durée de la tâche B. Quelle option est préférable ? justifier.

Correction de l'exercice 42

1.



2. La date de début au plus tôt d'une tâche est la longueur du plus long chemin entre le début du projet et la tâche, d'où les dates de débuts au plus tôt :
   (a) Niveau 1 : $t_A = 0$, $t_C = 0$ et $t_F = 0$
   (b) Niveau 2 : $t_E = \max\{t_A + 3, t_C + 4\} = \max\{3, 4\} = 4$
   $t_B = t_A + 3 = 3$
   (c) Niveau 3 : $t_D = \max\{t_A + 3, t_E + 6\} = \max\{3, 10\} = 10$
   $t_G = \max\{t_A + 3, t_C + 4, t_F + 8, t_B + 2\} = \max\{3, 4, 8, 5\} = 8$
   (d) Niveau 4 : $t_{fin} = \max\{t_D + 1, t_G + 7\} = \max\{11, 15\} = 15$

   La durée minimale du projet étant égale à la longueur du plus long chemin entre le début et la fin du projet, elle est égale à t_{fin}, c'est à dire $\boxed{\text{15 jours}}$.

3. Les dates de début au plus tard et les marges de chaque tâches sont les suivantes :
   - Niveau 4 : $T_{fin} = t_{fin} = 15$
   - Niveau 3 : $T_D = T_{fin} - 1 = 15 - 1 = 14$, donc $M_D = T_D - t_D = 14 - 10 = 4$
     $T_G = T_{fin} - 7 = 15 - 7 = 8$, donc $M_G = T_G - t_G = 8 - 8 = 0$
   - Niveau 2 : $T_E = T_D - 6 = 14 - 6 = 8$, donc $M_E = T_E - t_E = 14 - 10 = 4$
     $T_B = T_G - 2 = 8 - 2 = 6$, donc $M_B = T_B - t_B = 6 - 3 = 3$
   - Niveau 1 : $T_C = \min\{T_E - 4, T_G - 4\} = \min\{4, 2\} = 2$, donc $M_C = T_C - t_C = 2 - 0 = 2$
     $T_A = \min\{T_E - 3, T_D - 3, T_G - 3, T_B - 3\} = \min\{5, 11, 5, 3\} = 3$, donc $M_A = T_A - t_A = 3 - 0 = 3$
     $T_F = T_G - 8 = 8 - 8 = 0$, donc $M_F = T_F - t_F = 0 - 0 = 0$

4. Un chemin critique est un chemin composé de tâche ayant une marge nulle. Ici, il n'y en a qu'un, c'est le chemin $\boxed{(\text{Début}, F, G, \text{Fin})}$.
5. La marge associée à la tâche E est de 4 jours, donc, rajouter 1 jour à la durée de la tâche E n'aura aucun impacte sur la durée totale du projet.
   La marge associée à la tâche B est de 3 jours, donc, rajouter 4 jours à la durée de la tâche B rajoutera $4 - 3 = 1$ jour sur la durée totale du projet. Ce dernier passerai donc de 15 jours à 16 jours.
   Il est donc préférable de $\boxed{\text{rajouter 1 jour à la tâche E}}$.

Exercice 43

Un festival de musique a lieu pendant 5 jours consécutifs, avec des concerts à Nantes et à Angers. Le tableau suivant récapitule le nombre de concerts qui ont lieu dans chacune des deux villes en fonction du numéro n de la journée.

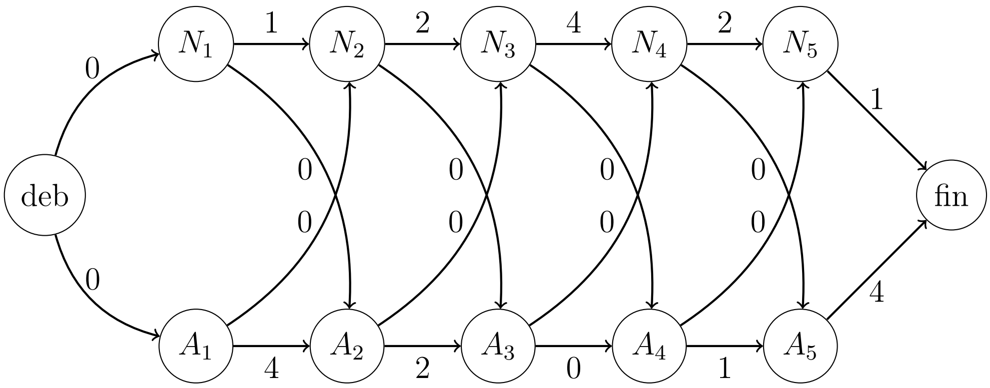
jour numéro...	1	2	3	4	5
nombre de concerts à Nantes	1	2	4	2	1
nombre de concerts à Angers	4	2	0	1	4

Marcellin souhaite assister à un maximum de concerts possible. Mais il ne se déplace qu'à vélo : il lui faut donc sacrifier une journée entière pour voyager d'une ville à l'autre. Le jour numéro 0, il a le choix entre pédaler vers Nantes ou vers Angers pour être sur place au début du jour numéro 1. Puis, chaque jour, il peut soit changer de ville (et n'assister à aucun concert), soit assister à tous les concerts dans la ville où il se trouve.

1. Montrer que le problème du choix du planning optimal de Marcellin peut être vu comme un problème de *plus long chemin* d'un sommet `"début"` à un sommet `"fin"`, dans un graphe G que l'on dessinera.
2. Dans un graphe potentiel-tâches, comment appelle-t-on le plus long chemin de `début` à `fin` ?
3. En considérant G comme un graphe potentiel-tâches, trouver les dates de début au plus tôt pour chaque sommet, et la durée minimale du projet.
4. Trouver les dates de début au plus tard, et le chemin critique.
5. Conclure sur le planning que devra suivre Marcellin.

Correction de l'exercice 43

1. Le problème du choix du planning optimal de Marcellin peut être vu comme un problème de *plus long chemin* d'un sommet `"début"` à un sommet `"fin"`, dans un graphe G suivant, où chaque sommet représente la ville de Nantes ou celle d'Angers une nuit donnée, deux sommets étant reliés si Marcellin peut aller de la ville 1 à la ville 2 en 1 jour ou s'il peut rester dans la même ville.
   Le poids de chaque arrête étant le nombre de concert qu'il verra pendant la journée.



2. Le plus long chemin de `début` à `fin` est appelé chemin critique.
3.
   $t\,(\text{deb}) = 0$
   $t\,(N_1) = 0$ et $t\,(A_1) = 0$
   $t\,(N_2) = 1$ et $t\,(A_2) = 4$
   $t\,(N_3) = 4$ et $t\,(A_3) = 6$
   $t\,(N_4) = 8$ et $t\,(A_4) = 6$
   $t\,(N_5) = 10$ et $t\,(A_5) = 8$
   $t\,(\text{fin}) = 12$
   La durée minimal du projet est donc 12.
4.
   $T\,(\text{fin}) = 12$
   $T\,(N_5) = 12 - 1 = 11$ et $T\,(A_5) = 12 - 4 = 8$
   $T\,(N_4) = 8 - 0 = 8$ et $T\,(A_4) = 8 - 1 = 7$
   $T\,(N_3) = 8 - 4 = 4$ et $T\,(A_3) = 7 - 0 = 7$
   $T\,(N_2) = 4 - 2 = 2$ et $T\,(A_2) = 4 - 0 = 4$
   $T\,(N_1) = 2 - 1 = 1$ et $T\,(A_1) = 4 - 4 = 0$

   Pour trouver un chemin critique, on détermine les marges de chaque étape :
   $M(N_1) = 1 - 0 = 1$ et $M(A_1) = 0$
   $M(N_2) = 2 - 1 = 1$ et $M(A_2) = 4 - 4 = 0$
   $M(N_3) = 4 - 4 = 0$ et $M(A_3) = 7 - 6 = 1$
   $M(N_4) = 8 - 8 = 0$ et $M(A_4) = 7 - 6 = 1$
   $M(N_5) = 11 - 10 = 1$ et $M(A_5) = 8 - 8 = 0$
   Le chemin critique unique et est donc :

   $$(\text{deb}, A_1, A_2, N_3, N_4, A_5, \text{fin})$$

5. Marcellin verra donc les 4 premier concerts du jour 1 à Angers, ira d'Angers à Nantes le jours 2, verra les 4 concerts de Nantes le jour 3, retournera à Angers le jour 4 pour voir les 4 derniers concerts à Angers le dernier jour.
   Il aura vu au total 12 concerts.