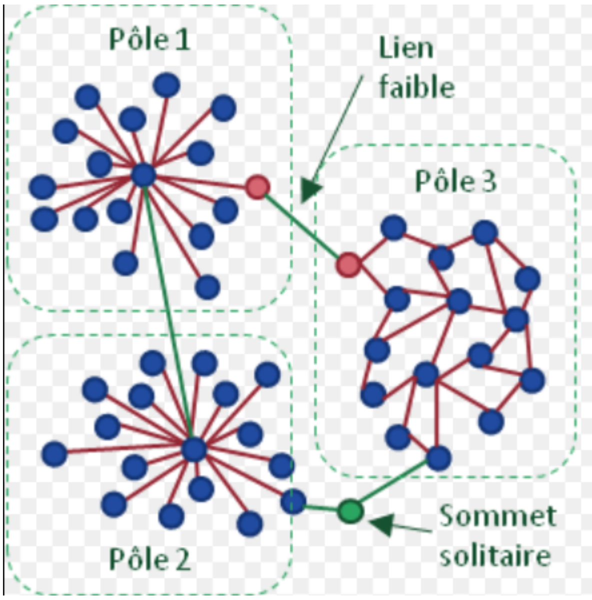
Statistiques

EXERCICES



Exercice 1

On considère la série suivantes :

classes	effectifs
$120 \leqslant x < 150$	3300
$150 \leqslant x < 160$	2000
$160 \leqslant x < 170$	3500
$170 \leqslant x < 190$	4000
$190 \leqslant x < 230$	3000

1. Déterminer la moyenne de cette série.
2. Tracer l'histogramme de cette série.
3. Déterminer le premier quartile, la médiane ainsi que le troisième quartile par interpolation linéaire.
4. Déterminer l'écart type.

Exercice 2

oyenne harmonique.
Un cycliste fait l'entraînement suivant sur une boucle de x km :

- 1 boucle à 20 km/h
- 1 boucle à 40 km/h
- 1 boucle à 10 km/h

Déterminer la vitesse moyenne de ce cycliste.

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_n$, n nombres réels.
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x - x_k| \end{array}$$

Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et en quelles valeurs ce minimum est atteint.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, ..., x_n$, n nombres réels.
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x - x_k)^2} \end{array}$$

Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et en quelles valeurs ce minimum est atteint.

Exercice 5

Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ les n valeurs d'une série statistique et $\overline{x}$ la moyenne arithmétique de cette série.

1. Démontrer que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\overline{x}-x_k)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2 - \overline{x}^2$$
2. Application.
Un test dans 10 lycées différents donne les résultats suivants :
   - Moyenne : 11
   - Ecart type : 4
   - Nombre total d'élève ayant participé au test : 900

   100 élèves d'un $11^{\text{ième}}$ lycée souhaite aussi participer au test. Leurs résultats sont les suivants :
   - Moyenne : 16
   - Ecart type : 2

   Déterminer la moyenne et l'écart type de l'ensemble des élèves des 11 lycée.

Exercice 6

On considère la série suivantes :

classes	effectifs
$0 \leqslant x < 10$	100
$10 \leqslant x < 30$	100
$30 \leqslant x < 35$	50
$35 \leqslant x < 50$	300

1. Déterminer la moyenne de cette série.
2. Tracer l'histogramme de cette série.
3. Déterminer le premier quartile, la médiane ainsi que le troisième quartile par interpolation linéaire.
4. Déterminer l'écart type.

Exercice 7

On considère les séries statistiques $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ donnant les résultats de deux caractères X et Y d'une population de 30 individus tels que pour tout individu ω_i, on a : $X(\omega_i) = x_i$ et $Y(\omega_i) = y_i$.
De plus, on donne :

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = -30 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30} y_i = 60 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 300 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 600$$

$$\sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{y})^3=-180 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{y})^4=3000$$

1. Calculer $\overline{x}$, $\overline{y}$, l'écart type relatif au caractère X, noté σ_x et l'écart type relatif au caractère Y noté σ_y.
2. Calculer les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de kurtosis de la série $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
3. faire un schéma simplifier de la distribution du caractère Y par rapport à une distribution normale.

Exercice 8

On considère les séries statistiques $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ donnant les résultats de deux caractères X et Y d'une population de 30 individus tels que pour tout individu ω_i, on a : $X(\omega_i)=x_i$ et $Y(\omega_i)=y_i$.
De plus, on donne :

$$\sum_{i=1}^{30}x_i=-30 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30}y_i=60 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30}x_i^2=300 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30}y_i^2=600$$

$$\sum_{i=1}^{30}x_iy_i=-240 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{y})^3=-180 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30}(y_i-\overline{y})^4=3000$$

1. Calculer $\overline{x}$, $\overline{y}$, l'écart type relatif au caractère X, noté σ_x et l'écart type relatif au caractère Y noté σ_y.
2. Déterminer la covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$ puis le coefficient de corrélation linéaire des deux caractère X et Y.
3. Donner, en fonction de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et $\mathrm{Var}(X,Y)$ les coefficients $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ de la droite de régression linéaire de y en fonction de x.
   Donner des valeurs approchées à 10^{-2} de $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$.
4. Donner une approximation à 1% du pourcentage de variation du caractère Y par rapport au caractère X.

Exercice 9

Un hypermarché dispose de 20 caisses. On s'intéresse au temps moyen d'attente en fonction du nombre de caisses ouvertes un jour de semaine.
Soient X et Y les caractères associant respectivement à chaque jour d'ouverture i le nombre x_i de caisse ouverte, et temps d'attente y_i. Le tableau ci-dessous donne le nombre x_i de caisses ouvertes et le temps moyen d ?attente y_i correspondant.

Jour	1	2	3	4	5	6	7
X	3	4	5	6	8	10	12
Y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r.
2. Montrer que le coefficient de régression linéaire de Y en X est $\widehat{a}=-0.7067$.
3. En déduire une approximation de la réduction du temps d'attente à chaque ouverture

d'une caisse supplémentaire.

4. Déterminer les coefficient de la droite de régression linéaire.
5. Selon vous, y a-t-il causalité entre le nombre de caisses et le temps d'attente.
6. Faites une estimation du temps d'attente si on ouvre qu'une caisse, 7 caisses, les 20 caisses.

Exercice 10

On a relevé pour différents pays le PIB par habitant en 2004, X (en dollars) et le taux brut de scolarisation des moins de 24 ans la même année Y (en pourcentage).
Les résultats sont les suivants :

Pays	PIBX	Taux de scolarisation$Y$
Pays en d´eveloppement	4775	63
Pays les plus pauvres	1350	45
Pays arabes	5680	62
Asie de l ?Est et Pacifique	5872	69
Amérique latine et Caraïbes	7964	81
Asie du Sud	3072	56
Afrique Sub-saharienne	1942	50
Europe centrale,orientale et CEI	8802	83

$$\sum x_i = 39457 \quad ; \quad \sum y_i = 509 \quad ; \quad \sum x_i^2 = 245474957 \quad ; \quad \sum y_i^2 = 33685$$

$$\sum x_i y_i = 2763685$$

1. On cherche à expliquer le taux de scolarisation en fonction du PIB. Identifier la variable à expliquer et la variable variable explicative. Pour chaque variable calculer la moyenne observée et la variance observée.
2. Expliquer l'objectif de la régression linéaire simple.
3. Donner l'équation du modèle théorique.

Exercice 11

Soit X et Y deux caractères définis sur une même population.

1. Démontrer que s'il existe deux réels a et b tels que $Y = aX + b$, alors le coefficient de corrélation linéaire r vérifie : $|r| = 1$
2. Démontrer la réciproque.

Exercice 12

Les pièces fabriquées dans une usine proviennent de deux machines. La machine A produit 1% de pièces défectueuses et la machine B en produit 5%. La production de l'usine provient à 70% de la machine A. On choisit au hasard une pièce produite par l'usine.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. On constate que la pièce est défectueuse. quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

3. Même question dans le cas ou l'on constate que la pièce n'est pas défectueuse.

Exercice 13

Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé. Démontrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 14

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotés de 1 à n.

1. On tire simultanément k boules de l'urne.
   Soit $p \in [\![k,n]\!]$, calculer la probabilité que p soit le plus grand numéro tiré ?
2. On tire successivement et avec remise k boules de l'urne. Calculer la probabilité que deux numéros identiques et seulement deux apparaissent ?

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{1 \times 2} & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 1 - \dfrac{1}{2 \times 3} & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ 1 - \dfrac{1}{n \times (n+1)} & \text{si} \quad n < x \leqslant n+1 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

1. Calculer les probabilités $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = x$ pour $x \in [0;1]$, $f(x) = 2 - x$ pour $x \in [1;2]$, et est nulle en dehors de ces intervalles.

1. Vérifier que f définie bien une densité de probabilité.
2. Déterminez la fonction de répartition de X et en déduire la médiane de cette loi.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $P\{|X - 1| < x\}$.

Exercice 17

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = x + 2$ pour $x \in [-2;-1]$, $f(x) = -x + 2$ pour $x \in [1;2]$, et est nulle en dehors de ces intervalles.

1. Vérifier que f définie bien une densité de probabilité.

2. Déterminez la fonction de répartition de X et en déduire la médiane de cette loi.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 18

On fixe un entier N Un athlète saute successivement par dessus des barres numéroté de 1 à N.
Il s'arrête au premier échec ou bien quand il a passé la barre numéro N.
Lorsqu'il tente la barre numéro i, il a une chance sur i de réussir.
On défini pour $i \in \{1;2;...;N\}$ l'événement A_i :"l'athlète a franchi la barre numéro i" et l'événement B_i :"la dernière barre réussit par l'athlète est la barre numéro i".
Il faut comprendre que si l'athlète ne franchi pas une barre, il ne franchi pas les suivantes, puisqu'il n'a alors même pas le droit de les tenter.

1. Calculer $P\big(A_i\big)$ pour tout $i \in \{1;2;...;N\}$.
2. Démontrer que pour tout $i \in \{1;2;...;N-1\}$, $P\big(B_i\big) = \dfrac{1}{i!} - \dfrac{1}{(i+1)!}$.
3. Que vaut $P\big(B_N\big)$

Exercice 19

Le cinéma de la commune propose différents tarifs :

- Un tarif plein à 12 euros.
- Un tarif étudiant à 7 euros.
- Un tarif enfant (moins de 12 ans) à 5 euros.

Une étude portant sur la clientèle a montré que 48% des clients paient un tarif plein, 22% des clients un tarifs enfants et les autres un tarif étudiants.
Par ailleurs, sur l'ensemble des clients, 12% achètent uniquement un paquet de bonbons a 4 euros, 23% achète uniquement un paquet de pop-corn taille standard à 5 euros et 15% achètent uniquement un paquet de pop-corn grande taille à 7 euros. Les autres clients n'achètent rien.
On choisit au hasard un client du cinéma et on appelle respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires qui associe à chaque issue respectivement le prix payé pour la place de cinéma et pour les confiseries.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et de X_2.
2. Déterminer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le prix total dépensé pas le client.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1 et X_2.
   (b) En déduire $E(X)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 20

On considère une urne dans laquelle se trouve différentes boules de couleur : des rouges, des vertes et des noires.
On tire avec remise trois boules de l'urne.
a chaque étape, obtenir une boule noire rapporte 5 points, obtenir une boule verte rapporte 2 points et obtenir une boule rouge fait perdre 10 points.
Pour tout entier naturel i compris entre 1 et 3, on note respectivement R_i, V_i et N_i l'événement "obtenir une boule rouge (respectivement une boule verte ou une boule noire) au $i^{\text{ième}}$ tirage.
On note enfin X_1, X_2 et X_3 les variables qui associe à chaque issue le nombre de points obtenu

au premier (respectivement deuxième et troisième) tirage.

1. Calculer les valeurs suivantes :
   $X_1(V_1 \cap R_2 \cap N_3)$, $X_2(V_1 \cap R_2 \cap N_3)$, $X_1(V_1 \cap R_2 \cap R_3)$, $X_2(V_1 \cap R_2 \cap R_3)$ et $X_3(V_1 \cap R_2 \cap R_3)$.
2. Déterminer les lois de probabilité de X_1, X_2 et X_3.
3. Déterminer $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.
4. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre total de points.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3
   (b) En déduire $E(X)$

Exercice 21

Deux lycées sont situés dans la même commune.
Le premier lycée, noté lycée A, réalise de très bons résultats aux examen : 75% des élèves de l'établissement obtiennent le bac avec mention.
Dans le lycée B, seulement 55% des élèves l'obtiennent avec mention.
On choisit 12 élèves du lycée A et 20 du lycée B.
Le nombre important d'élèves dans chaque lycée permet d'assimiler ces expériences à des tirage avec remises.
On note respectivement X et Y les variables aléatoires associant à chaque issue le nombre d'élèves du lycée A (respectivement du lycée B) ayant eu le bac avec mention.

1. Donner les lois suivies par X et Y.
2. Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre d'élèves ayant eu le bac avec mention indépendamment de leur lycée d'origine.
   (a) Exprimer Z en fonction de X et de Y.
   (b) En déduire $E(Z)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Calculer $V(Z)$ et en déduire $\sigma(Z)$

Exercice 22

On considère une urne contenant trois boules indiscernables au toucher et numéroté de 1 à 3.
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.
Pour $k \in \{1; 2; 3\}$, on dit qu'il y a "rencontre" au $k^{\text{ième}}$ tirage lorsque l'on tire la boule numéroté k au $k^{\text{ième}}$ tirage.
On cherche a connaître le nombre moyen de rencontres.
Pour tout $(m, k) \in \{1; 2; 3\}^2$, on note $B_{m,k}$ l'événement "On a obtenu la boule m au $k^{\text{ième}}$ tirage".

1. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires définies par :
   - $X_1 = 1$ si la boule numéroté 1 est tirée en premier et 0 sinon.
   - $X_2 = 1$ si la boule numéroté 2 est tirée en deuxième et 0 sinon.
   - $X_3 = 1$ si la boule numéroté 3 est tirée en troisième et 0 sinon.

   Donner alors $E(X_1)$, $E(X_2)$ et $E(X_3)$.
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de rencontre.
   (a) Exprimer X en fonction de X_1, X_2 et X_3.

(b) En déduire le nombre moyen de rencontre.

3. On considère une urne contenant n boules numéroté de 1 à n. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne.
   Quel est théoriquement le nombre moyen de rencontre ?

Exercice 23

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient une unique boule, qui est blanche.
On dispose d'une pièce dont la probabilité de donner pile est $p \in \left]0;1\right[$. Les différents lancers de la pièces sont indépendants. On note $q = 1 - p$.
On lance n fois de suite la pièce. on ajoute des boules noire dans l'urne a chaque fois que l'on obtient pile : deux pour le premier pile, 3 pour le deuxième pile, etc. Ainsi on ajoute $k+1$ boules noire dans l'urne pour la $k^{\text{ième}}$ obtention de pile.
On note X la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de piles obtenus, et N la variable aléatoire associant à chaque issue le nombre de total de boules dans l'urne.

1. (a) Exprimer N en fonction de X.
   (b) Quelle est la loi de X.
   (c) En déduire l'espérance de N.
2. On tire une boule de l'urne et on pose B :"La boule tirée est blanche".
   (a) Démontrer que
   $$P(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$$
   (b) Calculer cette somme.
3. On change la règle : cette fois, on ajoute dans l'urne 2^{k-1} boules noires lors de l'obtention du $k^{\text{ième}}$ pile.

Exercice 24

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant r \leqslant n$.
Un placard contient n paires de chaussures.
On tire au hasard $2r$ chaussures du placard et on note X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.
Les paires du placard sont numérotés de 1 à n et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui associe 1 à chaque issue si les deux chaussures de la paire i se trouvent dans les chaussures tirées, et 0 sinon.

1. Démontrer que $\forall i \in [\![1;n]\!], E(X_i) = \dfrac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.
2. En déduire $E(X)$

Exercice 25

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	$0,08$	$0,04$	$0,16$	$0,12$
2	$0,04$	$0,02$	$0,08$	$0,06$
3	$0,08$	$0,04$	$0,16$	$0,12$

1. Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi du couple $(\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\})$

Exercice 26

On lance successivement trois pièces de monnaie.
Soient X la variables aléatoire qui à chaque issue associe le nombre de faces apparues sur les deux premières pièces et Y celle qui associe à chaque issue le nombre de piles apparues sur les deux dernières.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y)
2. Déterminer la loi de X, puis celle de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 27

Soient a un réel et X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f définie bien une densité de probabilité.
2. Déterminez la fonction de répartition de X et en déduire la médiane de cette loi.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de même loi que X.
   Déterminer la fonction de répartition puis la densité de la variable aléatoire m_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
   $$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

Exercice 28

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Démontrer que la variable aléatoire $S = X + Y$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
2. Démontrer que la loi conditionnelle de X lorsque la somme $S = X + Y$ a une valeur fixé

s est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Exercice 29

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, de même loi, de moyenne m et de variance σ^2.
   En justifiant soigneusement, calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ en fonction de m et de σ.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires qui ne sont **pas indépendantes**.
   (a) Exprimer $VAR\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ en fonction de $VAR(X_i)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ pour $(i,j) \in [\![1, 2, ..., n]\!]$.
   (b) Que devient ce résultat quand les couples sont de même lois.

Exercice 30

Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, de même loi de densité f_X définie par :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Kx^4 \mathrm{e}^{-\theta x} 1_{[0;+\infty[}(x) \end{array}$$

où K est une constante positive et θ un réel strictement positif.

1. Déterminer K en fonction de θ.
   (On admettra l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n!$
2. Représenter f_X.
3. Calculer $E(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
   Déterminer $E\left(\overline{X}_n\right)$ et $\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)$

Exercice 31

Etudier la convergence en probabilité, la convergence en moyenne puis la convergence en moyenne quadratique de la suite de variables aléatoires (X_n) dont la loi de probabilité est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$P(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2} \quad , \quad P(X_n = n) = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Exercice 32

Soit (X_n) la suite de variables aléatoires dont la loi de probabilité est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

1. Montrer que (X_n) converge en probabilité, mais pas en moyenne quadratique, vers zéro

quand n tend vers $+\infty$.

2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires de même loi $\mathcal{N}(0;1)$ et indépendantes des variables aléatoires (X_n).
   Etudiez la convergence en loi de la variable aléatoire $Z_n = X_n + Y_n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Z_n)$.

Exercice 33

Etudiez la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (X_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = n) = 1 \quad \text{et } P(X_n \neq n) = 0$$

Exercice 34

Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, de même loi de densité f_X définie par :

$$f_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Kx^4 \mathrm{e}^{-\theta x} 1_{[0;+\infty[}(x) \end{array}$$

où K est une constante positive et θ un réel strictement positif.

1. Déterminer K en fonction de θ.
   (On admettra l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = n!$
2. Représenter f_X.
3. Calculer $E(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
   Déterminer $E\left(\overline{X}_n\right)$ et $\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)$
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{X}_n$ en justifiant votre calcul.
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n^3$.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n$, en justifiant le calcul.

Exercice 35

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de loi géométrique de paramètre $p_n = \dfrac{\theta}{n}$, où θ est un nombre strictement positif.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge vers la loi exponentielle de paramètre θ.

Exercice 36

Soient $p \in]0;1[$ et (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par :

$$P(U_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(U_n = -1) = q = 1 - p$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et V_n la variable aléatoire définie par :

$$V_n = \prod_{i=1}^{n} U_i$$

1. Déterminer la loi exacte de V_n.
2. Déterminer la loi limite de la suite (V_n)

Exercice 37

Soient $\theta > 0$ et (X_n) une suite de variables aléatoires de loi géométrique de paramètre $p_n = \dfrac{\theta}{n}$.
Montrer que la suites $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre θ.