Terminale - Spé maths

DM 2

Correction

Partie A

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$

$\quad = e^{-x} - x e^{-x}$

$\quad = (1 - x) e^{-x}$

$1 - x > 0 \iff x < 1$

et $1 - x = 0 \iff x = 1$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} > 0$

d'où le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
variation de f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	

PARTIE B

1. Voir annexe
2. Hérédité

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$

$u_{n+1} = f(u_n) = u_n e^{-u_n}$

donc $u_{n+1} > 0$ en tant que produit de nombres strictement positifs.

Initialisation

$u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc $u_0 > 0$

Conclusion

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$

③ Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_n > 0$ donc $-u_n < 0$

d'où $e^{-u_n} \leq e^0$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

$e^{-u_n} \leq 1$

$u_n e^{-u_n} \leq u_n$ car $u_n > 0$ d'après ②

donc $u_{n+1} \leq u_n$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$

④ (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle est convergente

⑤ Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$
\begin{aligned}
f(x) = x &\iff x e^{-x} = x \\
&\iff x e^{-x} - x = 0 \\
&\iff x(e^{-x} - 1) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = e^0 \\
&\iff x = 0
\end{aligned}
$$

Donc, d'après 4, $\boxed{\ell = 0}$

PARTIE C

```
def Somme(n):
    u = 1
    S = 1
    for k in range(n):
        u = u * math.exp(-u)
        S = u + S
    return S
```