

Terminale - Spé maths

DM 2

Correction

Partie A

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

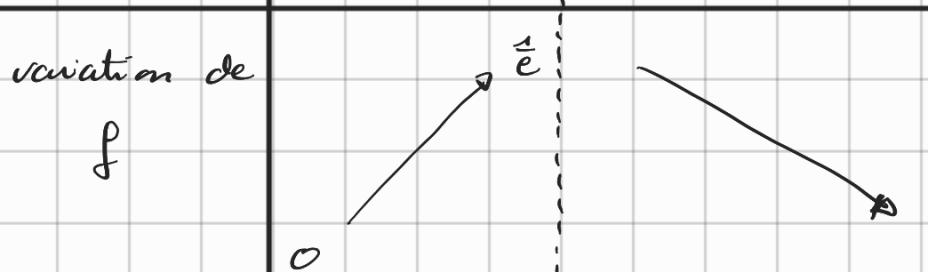
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) \\ &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

$$1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\text{et } 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-x} > 0$

d'où le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
variation de f			

PARTIE B

① Voir annexe

② Héredité

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n e^{-u_n}$$

donc $u_{n+1} > 0$ en tant que produit de nombres strictement positifs.

Initialisation

$u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc $u_0 > 0$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

③ Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_n > 0$ donc $-u_n < 0$

d'où $e^{-u_n} \leq e^0$ car la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R}

$$e^{-u_n} \leq 1$$

$u_n e^{-u_n} \leq u_n$ car $u_n > 0$ d'après ②

donc $u_{n+1} \leq u_n$

la suite (u_n) est donc décroissante.

④ (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle est convergente

⑤ Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$f(x) = x \iff x e^{-x} = x$$

$$\iff x e^{-x} - x = 0$$

$$\iff x(e^{-x} - 1) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = e^0$$

$$\iff x = 0$$

Donc, d'après 4, $\ell = 0$

PARTIE C

```
def Somme(n) :  
    u = 1  
    S = 1  
    for k in range(n) :  
        u = u * math.exp(-u)  
        S = u + S  
    return S
```