Terminale spécialité maths

DS 5

Correction

PARTIE A

1\. a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -2 \times 3x^2 + 2x$$
$$= 2x(-3x+1)$$

De plus $-3x+1 \leq 0 \iff -3x \leq -1$

$$\iff x \geq \frac{1}{3}$$

et $-3x+1=0 \iff x = \frac{1}{3}$

d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$$
$$= x^2\left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$

c)

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-3x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	↘	-1	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	$-\infty$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{-2 + 3 - 27}{27}$$

$$= \frac{-26}{27}$$

(2) On déduit du tableau de variation de la question 1-c) le signe de g suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (1+2x+3x^2)e^{-2x} + (1+x+x^2+x^3).(-2e^{-2x}) \\
&= (1+2x+3x^2-2-2x-2x^2-2x^3)e^{-2x} \\
&= (-1+x^2-2x^3)e^{-2x} \\
&\boxed{= g(x)e^{-2x}}
\end{aligned}
$$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe $g(x)$, donc, en utilisant le résultat de la question 2 de la partie A, on obtient :

f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$
f est strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$

(3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$1+x+x^2+x^3 = x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x\right)$$

avec

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x\right) = -\infty$$

donc, par produit $\lim_{x\to-\infty}(1+x+x^2+x^3) = -\infty$

de plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty$

donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)\, e^{-2x}$$
$$= \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) \cdot x^3 e^{-x} \cdot e^{-x}$$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 e^{-x}\right) = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x}\right) = 0$

Donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

5) On déduit des questions précédentes le tableau suivant.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

$$f(\alpha) = (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)\, e^{-2\alpha}$$