

Terminal spécialité maths
DS 5
Correction

PARTIE A

① - a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}g'(x) &= -2x^3 + 2x \\&= 2x(-3x^2 + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{De plus } -3x^2 + 1 \leq 0 &\iff -3x^2 \leq -1 \\&\iff x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\text{et } -3x^2 + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$2x$	-	0	+	+
$-3x^2 + 1$	+	+	0	-
$g'(x)$	-	0	+	0
g				

b) Sei $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x^3 + x^2 - 1 \\ &= x^2 \left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

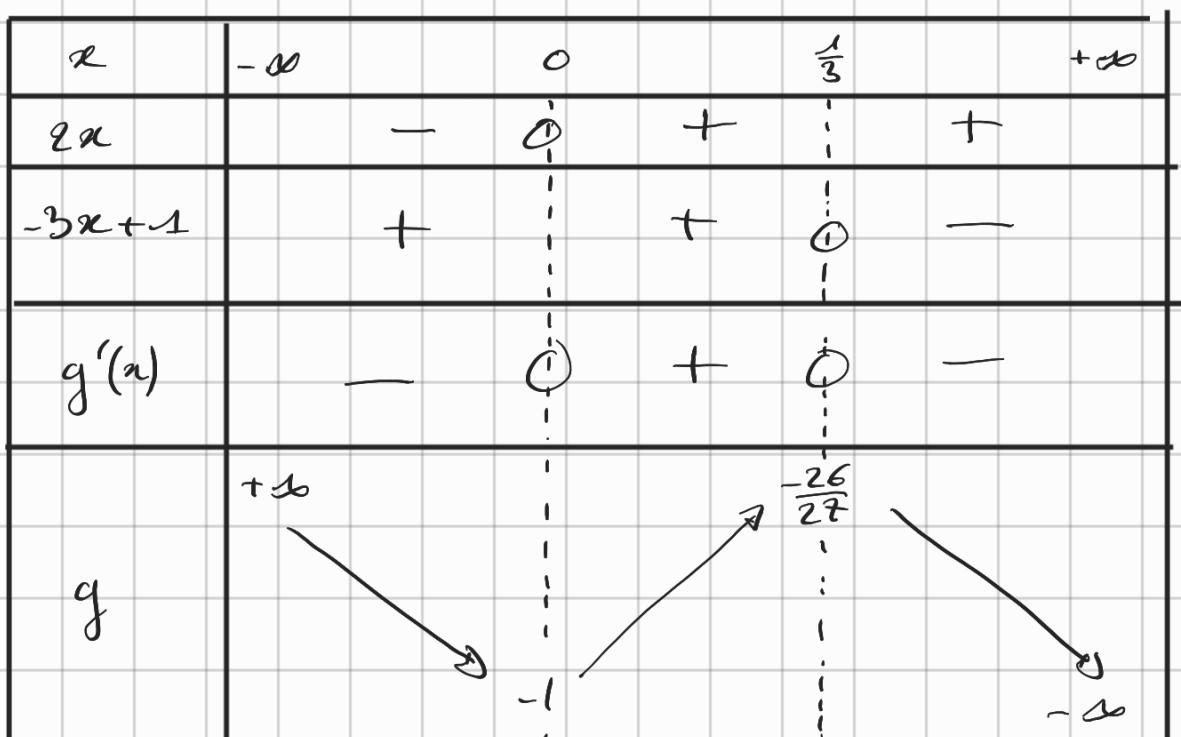
aus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$

dann, per produkt, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$

dann, per produkt, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty}$

c)



$$g\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{-2 + 3 - 27}{27}$$

$$= -\frac{26}{27}$$

② On déduit du tableau de variation de la question 1-c) le signe de g suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

PARTIE B

① Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+2x+3x^2)e^{-2x} + (1+x+x^2+x^3)(-2e^{-2x}) \\ &= (1+2x+3x^2-2-2x-2x^2-2x^3)e^{-2x} \\ &= (-1+x^2-2x^3)e^{-2x} \\ &= g(x)e^{-2x} \end{aligned}$$

② $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe $g(x)$, donc, en utilisant le résultat de la question 2 de la partie A, on obtient :

f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$

f est strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$

③ Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$1+x+x^2+x^3 = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x \right)$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x \right) = -\infty$$

donc, par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x+x^2+x^3) = -\infty$

de plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = +\infty$

donc, par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$

④ Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+x^3)e^{-2x} \\ &= \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) \cdot x^3 e^{-x} \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 e^{-x}) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$$

Donc, par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$

la droite d'équation $y=0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de f .

⑤ On déduit des questions précédentes le tableau suivant.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

The graph shows a curve starting from negative infinity as x approaches negative infinity, passing through a local maximum at x = alpha where the tangent is horizontal (f'(alpha) = 0), and approaching zero as x goes to positive infinity. A vertical dashed line is drawn at x = alpha, with an arrow pointing to the point (alpha, f(alpha)) on the curve.

$$f(x) = (1+x+x^2+x^3)e^{-2x}$$