

TERMINALE MATHS EXPERT - INT3 : NOMBRES COMPLEXES ET ARITHMÉTIQUES

2023-2024

Exercice 1

Les affirmations suivantes son-elles vraies ou fausses :

1. Soient a et b deux nombres réels.
Les nombres complexes $z_1 = a(a-1) + i(b^2+1)$ et $z_2 = a-1 + 2ib$ sont opposés pour un unique couple $(a; b)$.
2. Quel que soit le réel b , le nombre complexe $z = (2+ib)(2b+i)$ a une partie imaginaire non nulle.
3. Soient a et b deux nombres réels.
Les nombres complexes $z_1 = (4a^2 - a - 1) + ib(b-1)$ et $z_2 = 3a - 2 + i(b-1)$ sont égaux pour un unique couple $(a; b)$.
4. Il n'existe pas de réel a tel que le nombre complexe $(a+i)^3$ est un nombre réel.

Exercice 2

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par

$$P(z) = z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1.$$

1. Justifier que 0 n'est pas une racine de P
2. Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $u = z + \frac{1}{z}$.
 - (a) Exprimer $u^2 - 3$ en fonction de z .
 - (b) Calculer $\frac{P(z)}{z^2}$ et l'exprimer en fonction de u .
3. Dédire de la question précédente que $p(z) = 0$ si et seulement si $z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z + \frac{1}{z} = -3$.
4. Résoudre dans \mathbb{C} les équations :
 - (a) $z + \frac{1}{z} = -3$.
 - (b) $z + \frac{1}{z} = 1$.
5. En déduire les racines de P dans \mathbb{C}

Exercice 3

1. (a) Soit d un diviseurs positif commun à 261 et 423.
Dédire de l'égalité $26 \times 261 - 16 \times 423 = 18$ que $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$;
(b) En déduire l'ensemble des diviseurs communs de 261 et 423.
2. Soit n un entier relatif.
 - (a) Démontrer que si $4n + 3$ divise $6n + 2$, alors $4n \in \{-8; -4; -2; 2\}$
 - (b) Dédire de la question précédente les valeurs de n telles que $\frac{6n+2}{4n+3} \in \mathbb{Z}$