Suites numériques, Généralité.

Exercice 1

Calculer les 5 premiers termes des suites ci-dessous :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{v_n - 1}{v_n} \end{array}\right.$$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = n^2 + 2n - 5$
4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & -2 \\ a_{n+1} & = & n\,(a_n - 1) \end{array}\right.$$

Exercice 2

la suite de Fibonacci est la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 1 \quad , \quad v_1 = 1 \quad \text{et pour tout } n \geq 0, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

Donner les 7 premiers termes de cette suite.

Exercice 3

pour chacune des suites suivantes, exprimer le terme de rang $n+1$ en fonction de n.

1. $u_n = 3n + 1$
2. $v_n = n^2 - 6n + 2$
3. $w_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

Exercice 4

soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = (n+3)^2$

1. les 4 premiers termes de cette suite.
2. Etudier le sens de variation de (v_n).

Exercice 5

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -\dfrac{3}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n) \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2v_n)$$

1. A l'aide d'une calculatrice, donner les 5 premier termes de (u_n) et (v_n).

2. Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 3u_n + 4v_n$.
   (a) Donner les 5 premiers terme de cette (w_n).
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $w_{n+1} = w_n$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 0$
3. Déduire de la question précédente u_n en fonction de v_n, puis v_{n+1} en fonction de v_n seulement.

Exercice 6

Les suites u et v sont définies pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

1. Démontrer que les deux suites sont strictement croissantes
2. Prouver que tous les termes de la suite v sont supérieur à 1 à partir d'un certain rang à déterminer.

Exercice 7

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, respectivement par :

$$u_n = -2n + 6 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & v_n + 2n + 1 \end{array} \right.$$

1. Représenter graphiquement à la calculatrice les premiers termes de chaque suite. Conjecturer le sens de variation de chacune des suites.
2. (a) Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = -2x + 6$.
   (b) En déduire les variation de la suite (u_n). La conjecture de la question 1 est-elle validée ?
3. (a) Exprimer en fonction de n la différence $v_{n+1} - v_n$.
   (b) En déduire les variations de la suite (v_n). La conjecture de la question 1 est-elle validée ?

Exercice 8

On appelle suite de Syracuse une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :
- le premier terme u_0 est un entier naturel non nul que l'on pourra choisir.
- pour tout entier naturel n, si u_n est pair, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$, sinon $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1. (a) Calculer les 5 premiers termes de la suites de Syracuse avec $u_0 = 1$
   (b) 1 est-il un terme de la suite de Syracuse aves $u_0 = 10$ et si oui, donner le plus petit rang n tel que $u_n = 1$.
2. La conjecture de Syracuse (datant de 1928 et non encore démontrée à ce jour) s'énonce ainsi : "Quelque soit l'entier naturel choisi pour u_0, le nombre 1 est atteint par un terme de la suite".

   - On appelle **temps de vol** de la suite l'indice du premier terme de la suite qui vaut 1.
   - On appelle **altitude de la suite** la valeur du plus grand terme de la suite.

   On considère le script suivant :(voir le module Python sur les variables pour la gestion des listes)

```
def Syracuse(u) :
    if ....... :
        u=u//2
    else :
        u=...
    return ...

def ListeSyracuse(u) :
    L=[u]
    while u!=1 :
        u=Syracuse(u)
        L.append(u)
    return L
```

(a) Compléter le programme ci-dessus pour que la fonction ListeSyracuse retourne la liste des termes de la suite de Syracuse jusqu'à ce que le terme 1 soit atteint.

(b) Quel nombre est alors renvoyé par "Syracuse(6)" ?, et par "Syracuse(7)" ?

(c) Que retourne l'instruction ListeSyracuse(11) ?

(d) Que fait l'instruction L.append(u)

3. Ecrire une nouvelle fonction permettant d'obtenir le temps de vol ainsi que l'altitude d'une suite de Syracuse.
4. Ecrire un programme qui détermine la plus petite valeur u_0 qui donne un temps de vol supérieur à 100.

Exercice 9

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$

1. Cette suite est-elle définie par une formule explicite ou par récurrence ?
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$. Représenter la courbe représentative de f dans un repère orthonormé ainsi que la droite d'équation $y = x$, puis en déduire graphiquement les points de coordonnées $(u_n; 0)$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$
3. Quel conjecture peut alors être faite concernant les variations de cette suite ?
4. Reprendre les deux dernières questions avec $u_0 = 16$

Exercice 10

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 2$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = u_n + 1$

(a) Calculer les 4 premier termes de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 3w_n$

Exercice 11

Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous :

1.
$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{(w_n)^2 + 1} \end{cases}$$

   Dans cette question, on considère sans le démontrer que $w_n > 0$ pour tout entier naturel n.

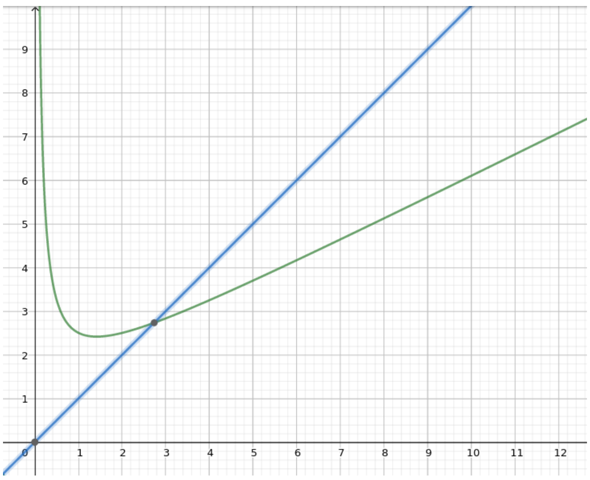
Exercice 12

Une solution contient cinq bactéries à l'instant $t = 0$.
Après l'ajout d'un élément nutritif, le nombre de bactéries augmente de 25% chaque seconde.

1. Ecrire un programme qui donne le nombre de bactéries au bout de n seconde.
2. Ecrire un programme qui donne le temps en secondes a partir duquel le nombre de seconde dépasse un certain nombre p.
3. Au bout de combien de seconde la nombre de bactéries va t-il dépasser 20000 ?

Exercice 13

On a tracer sur l'annexe la courbe représentative de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{1}{x}$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.



soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Sans calcul, tracer sur le graphique ci-dessous les points de coordonnées $(u_n; 0)$ pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$ (Laisser les traits de construction apparent).
2. Calculer u_1 et u_2.
3. En admettant que $u_n > 0$ pour tout entier n, démontrer $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $-u_n^2 + 2u_n + 2$
4. Etudier le signe de $-x^2 + 2x + 2$.
5. En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1 + \sqrt{3}$, justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. On considère le programme ci-dessous.

```
def seuil(s) :
    u=8
    n=0
    while u>s :
        u=u/2+1+1/u
        n=n+1
    return n
```

   (a) Que renvoie la commande "seuil(3)"

   (b) Quel est l'objectif de ce programme.