

**Statistique 1
Examen**

**Durée 1h30 - Sans table ni calculatrice ni documents.
Un extrait de la table de la loi normale figure au verso.**

Questions de cours

- 1°) Soient X_1, \dots, X_n n v.a. indépendantes, de même loi, de moyenne m et de variance σ^2 .
En justifiant soigneusement, calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i$, en fonction de m et σ^2 .
- 2°) Quand les variables X_1, \dots, X_n ne sont pas indépendantes, exprimer $\text{VAR}(\sum_{i=1}^{i=n} X_i)$ en fonction de $\text{VAR}(X_i)$ et $\text{COV}(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Préciser ce résultat quand les couples sont de même lois.
- 3°) En admettant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, démontrer la loi faible des grands nombres.

Exercice 1 Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f_X définie par

$$f_X(x) = K x^4 e^{-\theta x} 1_{[0, \infty[}(x)$$

où K est une constante positive.

- 1°) Déterminer K en fonction de θ . Représenter f_X . On admettra l'égalité : $\int_0^\infty u^n e^{-u} du = n!$.
- 2°) Calculer $E(X_1)$ et $\text{Var}(X_1)$. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, déterminer $E(\bar{X}_n)$ et $\text{Var}(\bar{X}_n)$.
- 3°) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n$ en justifiant votre calcul.
- 4°) On pose $Y_i = X_i^3$, calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n$, en justifiant le calcul.
- 5°) On suppose que l'on a $n = 400$. Déterminer une approximation de la loi de \bar{X}_n , dont on précisera l'espérance et la variance. On pose $a = 1 + \frac{\sqrt{5}}{200}$. Calculer $P(\bar{X}_n < a E(X_1))$. Les calculs se simplifient facilement.

Exercice 2 Soient X_1, \dots, X_n, \dots , une suite de variables aléatoires, de lois définies par :

$$P(X_n = 3 + \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n^4} \quad \text{et} \quad P(X_n = n^2) = \frac{1}{n^4}$$

Monter que la suite converge en probabilité vers une valeur que l'on déterminera.

Exercice 3 On considère deux régressions linéaires :

T1 - Somme des carrés	
Régression	350
Résidus	150
Totale	500

T2 - Somme des carrés	
Régression	260
Résidus	140
Totale	400

Laquelle des deux a le meilleur pouvoir prédictif ?

Extrait de la table de la fonction de répartition de la loi normale

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7793	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133