

STATISTIQUE 1
Interrogation n°2

Durée 1h30. Sans table ni calculatrice ni documents, table au verso.

Questions de cours

- 1°) En admettant l'inégalité de Markov, démontrer l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
 2°) Soient X_1, \dots, X_n des v.a ; i.i.d.. Exprimer $\sigma(\bar{X}_n)$ en fonction de n et $\sigma(X_1)$.
 3°) Dans le cas d'un nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) $i=1,2,\dots,n$ donner l'expression du coefficient de corrélation ρ . Que peut-on dire si $\rho = -1$?

Exercice 1

Soit une v.a. X de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et soit un réel $a \in]0,1[$, calculer $E[a^X]$.
 On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$.

Exercice 2

Soient X_1, \dots, X_n , n v.a. indépendantes de même loi de densité f_X définie par $f_X(x) = Kx^2 \mathbf{1}_{]0,\theta[}(x)$ où K est une constante positive.

1°) Déterminer K en fonction de θ . Représenter f_X .

2°) Calculer $E[X]$ et $\text{VAR}(X)$.

3°) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n$. On précisera le mode de convergence.

4°) On pose $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \bar{X}_n)^2$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. On détaillera les calculs.

5°) On suppose que l'on a $n=100$. Déterminer une approximation de la loi de \bar{X}_n , dont on précisera l'espérance et la variance.

On donne $\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1,291$. Calculer $P\left(\bar{X}_n \leq \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{100}\right)\theta\right)$ en arrondissant à la deuxième décimale la plus proche par interpolation linéaire ;

Exercice 3

Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes de loi définie par :

$$P\left(X_n = 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2}$$

$$P\left(X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n^2}$$

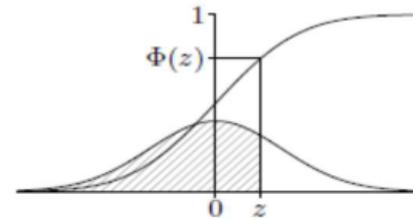
$$P\left(X_n = -\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{n^2}$$

Monter que la suite X_1, \dots, X_n, \dots converge en probabilité vers une valeur que l'on déterminera.

Table de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ est donnée par la fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952