TS - DS 5 du 20 novembre

2023-2024

Partie A

Rappel Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$$ f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $$f'(x) = a \times \mathrm{e}^{ax+b}$$

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) En déduire le tableau de variation de g.
2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1 \ ; \ 0]$.
   Déduire de la question précédente, et en fonction de α le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^{-2x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-2x}$.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ en fonction de α.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
5. En déduire le tableau de variation de f.