Divisibilité et congruence

Exercice 1

Déduire de $9 \times 351 - 12 \times 261 = 27$ les diviseurs commun à 351 et à 261

Exercice 2

On rappel que deux nombre premiers entre eux sont deux nombres dont les seuls diviseurs communs sont -1 et 1

Démontrer que les nombres 1000 et 1097 sont premiers entre eux.

Exercice 3

Vérifier l'égalité

$$5 \times 225 - 16 \times 70 = 5$$

En déduire les diviseurs communs de 70 et 225.

Exercice 4

Vérifier l'égalité

$$2 \times 362 - 3 \times 241 = 1$$

En déduire que 362 et 241 sont premiers entre eux.

Exercice 5

soit n un entier naturel.

1. Fraction $\dfrac{n}{n+1}$
   (a) Démontrer qui si d est un diviseur commun à n et $n+1$, alors $d \in \{-1; 1\}$.
   (b) Que peut-on en déduire concernant la fraction $\dfrac{n}{n+1}$.
2. Fraction $\dfrac{n}{2n+1}$
   (a) Démontrer qui si d est un diviseur commun à n et $2n+1$, alors $d \in \{-1; 1\}$.
   (b) Que peut-on en déduire concernant la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$.
3. Généralisation. Soit k un entier naturel non nul.
   (a) Démontrer qui si d est un diviseur commun à n et $kn+1$, alors $d \in \{-1; 1\}$.

(b) Que peut-on en déduire concernant la fraction $\dfrac{n}{kn+1}$

Exercice 6

On veux déterminer les entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\dfrac{5n+3}{n+2}$ soit un nombre entier.

1. Montrer que si n est solution, alors $n+2$ divise 7.
2. Déduire de la liste des diviseurs de 7 les valeurs possibles de n et conclure.

Exercice 7

Démontrer qu'il n'existe pas d'entiers relatifs a et b tels que $28a + 32b = 2359$.

Exercice 8

Le reste de la division euclidienne de l'entier naturel a par 45 est 9. Quel est le reste de la division euclidienne de a par 15 ? par 9 ? par 5 ? par 3 ?

Exercice 9

Dans la division euclidienne de 394 par l'entier naturel non nul b, le quotient est 17 et le reste r. Quelles sont les valeurs possibles pour b et r ?

Exercice 10

Dans une division euclidienne euclidienne, en augmentant le dividende de 20 et le diviseur de 4, et en conservant le quotient et le reste, on obtient une nouvelle égalité définissant une division euclidienne.
Quel est le quotient ?

Exercice 11

Le reste et le quotient dans la division euclidienne de l'entier naturel a par 7 sont égaux. Que peut-on en déduire pour a ?

Exercice 12

Les divisions euclidiennes de l'entier naturel a par 155 et par 161 donnent le même quotient et des restent égaux respectivement à 65 et 23. Déterminer a.

Exercice 13

1. Quels sont les restent possibles dans la divisions euclidienne d'un entier naturel impair par 4 ?
2. Démontrer que si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 14

Pour un entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de $n^2 + 2n$ par $n + 1$.

Exercice 15

On considère un entier naturel n.

1. Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 ne peut être que 0, 1 ou 4.
   (On pourra envisager les cas n pair et n impair et raisonner par disjonction de cas.)
2. Dans le cas où n est impair, démontrer que le reste de la division euclidienne de n^4 par 8 est toujours 1.

Exercice 16

Soit n un entier relatif. on pose :

$$a_n = 2n - 1 \text{ et } b_n = 9n + 4$$

1. Déterminer un entier k indépendant de n tel que :
   Si d divise a_n et b_n, alors d divise k.
2. En déduire la liste des diviseurs communs à a_n et b_n
3. En déduire les diviseurs de 5117 et 23035. Quel est le PGCD de 5117 et 23035 ?

Exercice 17

Les entiers a, b, et c sont tels que :

$$a \equiv 3 \pmod{5} \text{ , } b \equiv 32 \pmod{5} \text{ et } c \equiv -1 \pmod{5}$$

Donner le reste de la division euclidienne de a, b, et c par 5.

Exercice 18

Les entiers a, b, et c sont tels que :

$$a \equiv 13 \pmod{12} \text{ , } b \equiv -40 \pmod{12} \text{ et } c + 3 \equiv 0 \pmod{12}$$

Donner le reste de la division euclidienne de a, b, et c par 12.

Exercice 19

On suppose que $a \equiv 2 \ [7]$ et que $b \equiv 3 \ [7]$.
Montrer que $2a + b$ est un multiple de 7.

Exercice 20

On suppose que $a \equiv 2 \quad [5]$ et que $b \equiv 3 \quad [5]$.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de $a^2 + 2b^2$ par 5.

Exercice 21

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. 56^{35} par 8
2. 10^{29} par 9
3. 155^{49} par 13
4. 52^{28} par 3
5. 2^{2359} par 3
6. 568^{235} par 569
7. 8964^{25689} par 8965
8. 369^{456} par 368
9. 2011^{2013} par 2012

Exercice 22

Démontrer que l'on a :

$$35^{228} + 84^{501} \equiv 0 \quad (17)$$

Exercice 23

Démontrer que l'on a :

$$2 \times 35^{2012} - 3 \times 84^{2013} \equiv 5 \quad (17)$$

Exercice 24

Vérifier que $1000 \equiv 1 \quad (37)$
En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$10^{3n} \equiv 1 \quad (37)$$

Quel est le reste de la division euclidienne de 1001037 par 37 ?

Exercice 25

Quel sont, pour n variant dans $\mathbb{N}$, les restes possibles dans la division euclidienne de 3^n par 7 ?
En déduire le reste de la division euclidienne de 1998^{128} par 7.

Exercice 26

1. A l'aide d'un tableur, conjecturer les valeurs de l'entier naturel n tel que $6^n + 4^n$ est divisible par 5.
2. Démontrer le résultat conjecturé.

Exercice 27

Critère de divisibilité par 3

1. Pour tout entier naturel n, donner le reste dans la division euclidienne de 10^n par 3.
2. En écrivant $7835 = 7 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5$, en déduire que :
$$7835 \equiv 7 + 8 + 3 + 5 \quad (3)$$
3. Démontrer que tout entier naturel est congru, modulo 3, à la somme des chiffres de son écriture décimale.
4. En déduire un critère de divisibilité d'un entier par 3.

Exercice 28

Critère de divisibilité par 11

1. Pour tout entier naturel n, étudier le reste dans la division euclidienne de 10^n par 11.
2. En écrivant
$$\overline{abcdef} = a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10^1 + f$$
en déduire que :
$$\overline{abcdef} \equiv -a + b - c + d - e + f \quad (11)$$
3. En déduire que $\overline{abcdef}$ est divisible par 11 si et seulement si :
$$-a + b - c + d - e + f \text{ est divisible par } 11$$

Exercice 29

Déterminer sans démonstration générale un critère de divisibilité par 7