Limites de fonctions

Exercice 1

Les trois fonctions suivantes sont définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour chacune de ces fonctions, calculez la dérivée, étudiez le signe de cette dérivée et dresser le tableau de variation de la fonction.

1. $$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$$
2. $$g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2$$
3. $$h(x) = (2x-1)^2 - x^3$$

Exercice 2

Les trois fonctions suivantes sont définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour chacune de ces fonctions, calculez la dérivée, étudiez le signe de cette dérivée et dresser le tableau de variation de la fonction.

1. $$f(x) = x^2 + \sqrt{x}$$
2. $$g(x) = -\sqrt{x} - 2x$$
3. $$h(x) = x^3 - \frac{1}{x}$$

Exercice 3

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 2x + 3$$

Dans un repère, $\mathcal{C}$ est la courbe représentant f.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T

4. Tracer $\mathcal{C}$ et T sur l'écran d'une calculatrice et vérifier les résultats obtenus précédemment.

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

Dans un repère, $\mathcal{C}$ est la courbe représentant f.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Construire dans un repère la courbe représentative de f.
3. Graphiquement, discuter suivant les valeurs du réel m, le nombre de solution de l'équation :

$$f(x) = m$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Etude numérique
   (a) Démontrer que pour tout $x > 10$, $\dfrac{1}{x} \in]-0,1;0,1[$.
   (b) Déterminer une valeur x_0 telle que pour tout $x > x_0$, $\dfrac{1}{x} \in]-0,01;0,01[$
2. Généralisation. Soit e un réel strictement positif.
   (a) Démontrer que pour $x > \dfrac{1}{e}$, on a $\dfrac{1}{x} < e$.
   (b) Recopier et compléter la phrase suivante :
   "On peut en déduire que pour tout intervalle $]-e;e[$ contient toutes les valeurs ... pour $x > \ldots$".
   (c) Que peut-on en déduire ?

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

1. Etude numérique
   (a) Démontrer que pour tout $x > 10$, $\dfrac{1}{x^2} \in]-0,01;0,01[$.
   (b) Déterminer une valeur x_0 telle que pour tout $x > x_0$, $\dfrac{1}{x^2} \in]-0,0001;0,0001[$
2. Généralisation. Soit e un réel strictement positif.
   (a) Démontrer que pour tout x supérieur à une certaine valeur x_0 à déterminer en fonction

de e, on a $\dfrac{1}{x^2} < e$.

(b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

1. calculer $f(10), f(100), f(1000)$ et en donner des valeurs approchées à 10^{-2}.
2. Observer la représentation graphique de f sur une calculatrice. Quelle conjecture peut-on alors faire sur sa limite en $+\infty$?
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$.
4. On considère l'intervalle $]1,99;2,01[$. Monter que pour x supérieur à une certaine valeur x_0 à déterminer, on a $f(x) \in]1,99;2,01[$.
5. Soit r un réel strictement positif. On considère alors l'intervalle $]2-r, 2+r[$. Monter que pour x supérieur à une certaine valeur x_0 à déterminer, on a $f(x) \in]2-r;2+r[$
6. Justifier que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ en utilisant la définition de la limite finie en $+\infty$.

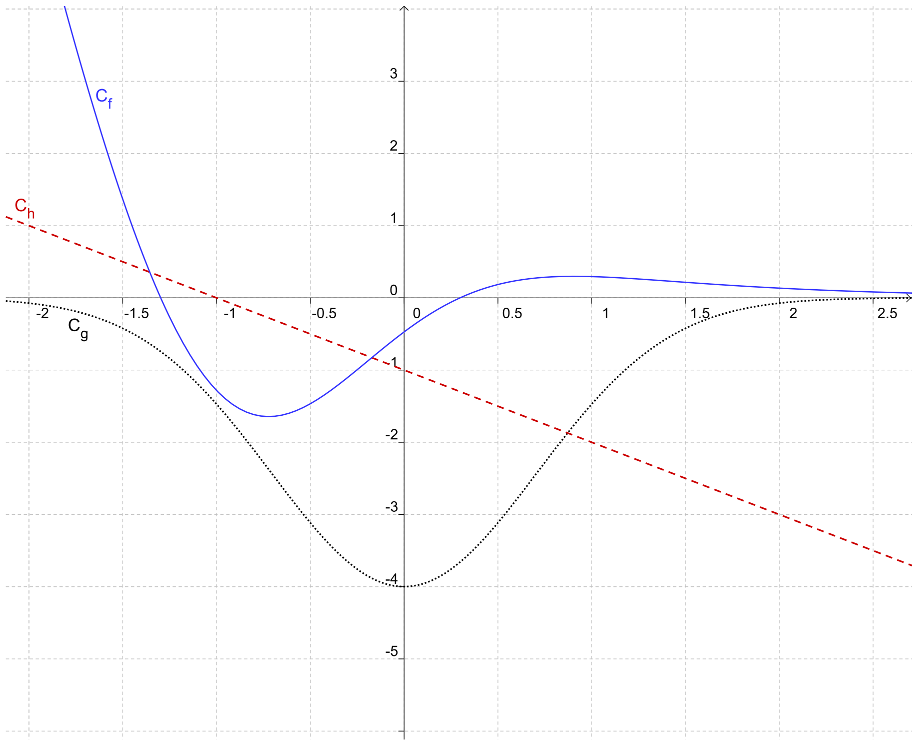
Exercice 8

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + 2x + 1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3-15x^2+1}{37x^2-12x+124}$

Exercice 9

Le graphique ci-dessous donne les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ de trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$



L'axe des abscisses est une assymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\mathcal{C}_h$ est une droite.

Donner si possible les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions $f+g$, $f-g$, fg, fh, $g+h$, $\frac{f}{g}$, $\frac{f}{h}$ et $\frac{g}{h}$.

Exercice 10

1. soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2-3x}{x^2+x+1}$. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x}$. Déterminer les limites de f en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 11

Déterminer les limites suivantes :

1. $$\lim_{x\to1, x<1} \frac{2-x}{x^2-1}$$
2. $$\lim_{x\to1, x>1} \frac{2-x}{x^2-1}$$

3. $$\lim_{x\to -1, x<-1} \frac{2-x}{x^2-1}$$

4. $$\lim_{x\to 2, x>2} \frac{x^2-1}{2-x}$$

5. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-5x}{x+1}$$

6. $$\lim_{x\to +\infty} -x^2+(x+1)(x^2-2)$$

7. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+2}{x+1}$$

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes :

1. $$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3x}$$

2. $$\lim_{x\to +\infty} x+\sqrt{x^2-3x}$$

3. $$\lim_{x\to -1, x>-1} \frac{1-x}{1+x}$$

4. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-x}{1+x}$$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -f(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. limite en 0
   (a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
   (b) En déduire $\lim_{x\to 0; x>0} f(x)$.

4. Démontrer que f est croissante sur $]0;+\infty[$.
5. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2+3}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition.
2. Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.
3. Etudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
4. Donner le tableau de variation complet de f.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$$

1. Démontrer que si $x>0$, alors $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.
2. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.

Exercice 16

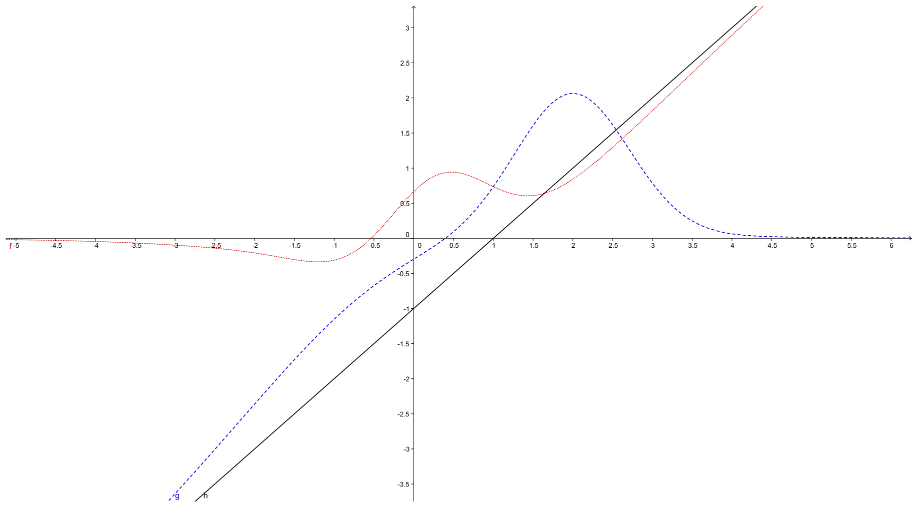
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x+\sin(x)}{x-1}$$

1. Démontrer que pour tout $x \geq 2$, alors $0 \leq f(x)-3 \leq \dfrac{4}{x-1}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 17

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes représentatives $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_u$ en $+\infty$ et à $\mathcal{C}_v$ en $-\infty$.



1. Conjecturer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions u et v.
2. En déduire les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions :

$$f = e^u \qquad \text{et} \qquad g = e^v$$

Exercice 18

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^{-x}$
2. $f : x \mapsto e^{2x} - e^x$
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x} + 1}{e^x + 1}$
4. $f : x \mapsto \sqrt{e^{2x} + 1}$

Exercice 19

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur les ensembles donnés

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = e^{x^2} + 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4} - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
5. $f(x) = e^x(x - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1)e^{-x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x^2$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Exercice 21

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{-1}{x}} + e^x$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x - x$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 - x + 1)e^x$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - e^x}{x^2 + x + 1}$
8. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

1. Etudier les variations de f
2. En déduire que pour tout réel x, $e^x > x$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x$.

Exercice 23

L'objectif de cet exercice est de démontrer que :

"à l'infini, la fonction exponentielle l'emporte sur $x \mapsto x$"

1. Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égale à 1, on a $e^x \geq x^2$. On pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^x - x^2$ sur $[1; +\infty[$, et utiliser la dérivée seconde f''.
   En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Pour étuder le comportement de xe^x lorsque x tend vers $-\infty$, pour tout réel non nul x, on pose $X = -x$.
   démontrer que $xe^x = -\dfrac{X}{e^X}$ et en déduire la limite de xe^x lorsque x tend vers $-\infty$.

Exercice 24

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

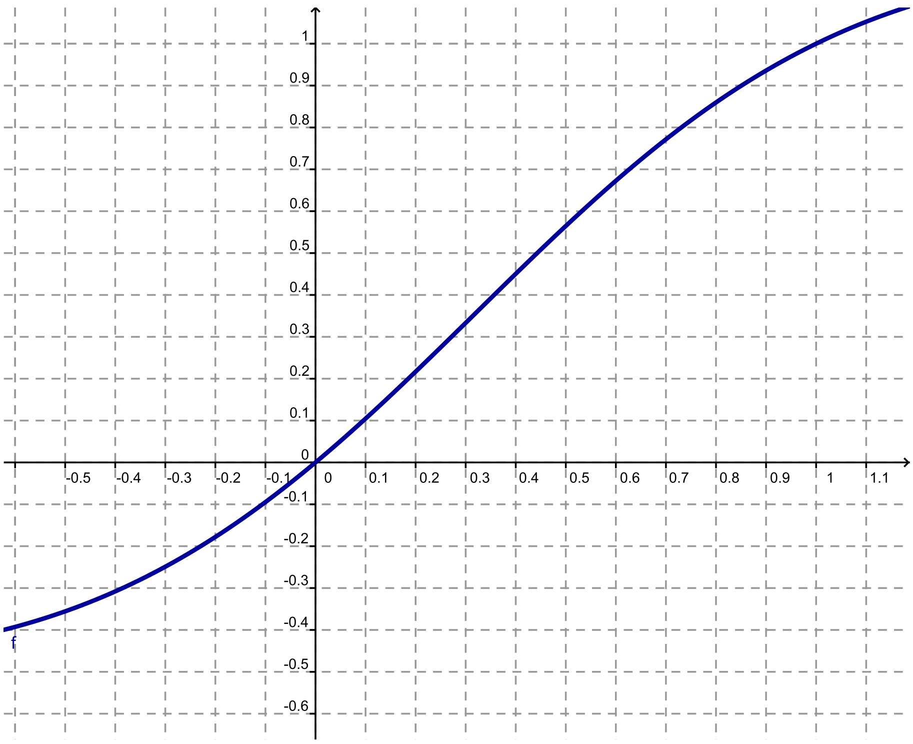
1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous.



On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   (b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel}\, n. \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 25

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
La figure est donnée ci-dessous.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 2.

2. Le point M a pour abscisse α.

   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.