Limites de fonctions

I limites de fonctions

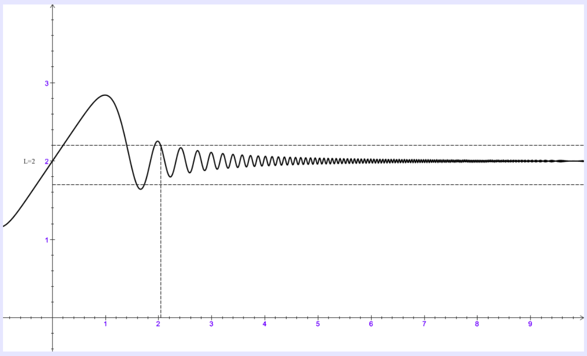
1 Limite finie en $+\infty$

Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$.
On dit que la fonction f a pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand . On écrit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

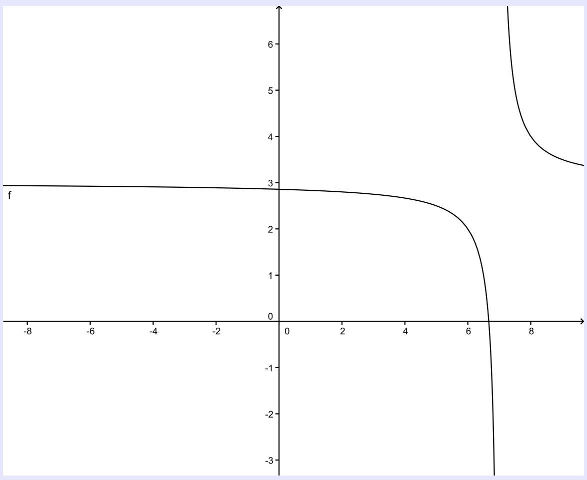


Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a[$.
On dit que la fonction f a pour limite L en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez petit . On écrit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

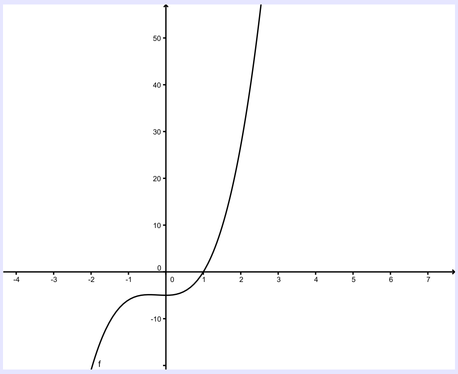


2 Limite infinie en $+\infty$

Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand . On écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$



Remarque
On définie de même

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

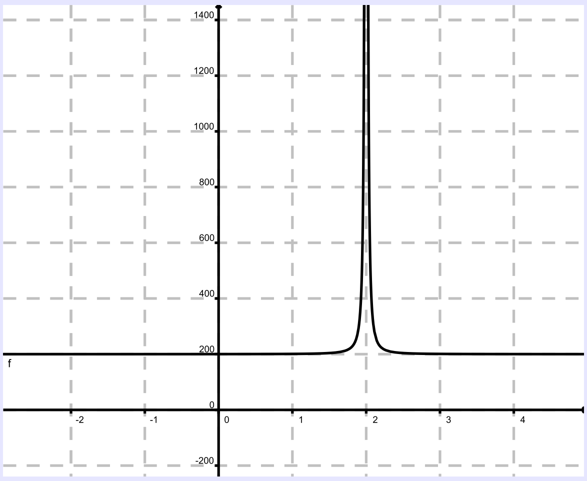
3 Limite infinie en a

Définition

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.



Remarques

- On définie de même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
- On définie de même $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = +\infty$
- On définie de même $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = +\infty$
- Dans ces trois dernier cas, la droite d'équation $x = a$ est aussi une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

II Opération sur les limites

1 limites des fonctions de références

Fonction	limite			
$f(x)=k$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=k$	
$f(x)=x$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$		
$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(x)=x^{2p}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$		
$\forall p\in\mathbb{N}, f(x)=x^{2p+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$		
$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(x)=\dfrac{1}{x^{2p}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)=+\infty$
$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(x)=\dfrac{1}{x^{2p+1}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)=-\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$		
$f(x)=e^x$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$		

2 Opération sur les limites

Soient f et g deux fonctions. Soient m et n deux réels.

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	m	m	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	n	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x)$	$m+n$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?

Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	m	$m>0$ ou $+\infty$	$m<0$ ou $-\infty$	$m>0$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	n	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$	$m\times n$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$m<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$	$+\infty$	? ?

Limite du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	m	m	0	$m>0$ ou $+\infty$	$m>0$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	$n\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0 avec $g>0$	0 avec $g<0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f}{g}(x)$	$\dfrac{m}{n}$	0	? ?	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$	$n \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f}{g}(x)$	$+\infty$ si $n > 0$ et $-\infty$ si $n < 0$	? ?

Remarques

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ de toutes fonctions polynômes est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ de toute fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

III Limite de fonction composée

Propriété

Soit u et v deux fonctions telles que la fonction $u \circ v$ soit définie sur un ensemble D. Soit a, b, et c trois réel, ou$-\infty$ ou $+\infty$. Si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} u(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} u \circ v = c$

Exemple

L'objectif est de déterminer la imite quand x tant vers $+\infty$ de $\sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x^2+1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4+\frac{1}{x^2}}{1}\right) = 4$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}\right) = \sqrt{4} = 2$$

IV Limites et ordre

Propriété

Soit α un réel

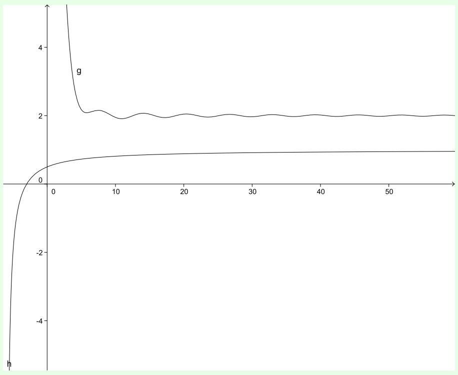
Soit f et g deux fonctions définies sur $]\alpha, +\infty[$ et telles que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$$

Si pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$a \leqslant b$$



Exemple

Démontrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

or la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a $f'(x) \geqslant 0$ et par conséquent f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

d'autre part $f(0) = 0$, donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, ou encore $\mathrm{e}^x \geqslant x$.

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}$.

Démonstration

Soit α un réel

Soit f et g deux fonctions définies sur $]\alpha, +\infty[$ et telles que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$$

Démontrons par contraposition que si pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$, alors : $a \leqslant b$.

C'est à dire que si $a > b$, alors il existe $x \in]\alpha; +\infty[$ tel que $f(x) > g(x)$.

Supposons que $a > b$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$, donc, d'après la définition de la limite :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel x_1 tels que pour tout $x \geqslant x_1$, $f(x) \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$ et $g(x) \in]b - \epsilon, b + \epsilon[$.

En particulier, pour $\epsilon = \dfrac{a-b}{3}$, on obtient, pour tout $x > x_1$:

$a - \dfrac{a-b}{3} < f(x)$ et $g(x) < b + \dfrac{a-b}{3}$

d'où $a - \dfrac{a-b}{3} < f(x)$ et $-b - \dfrac{a-b}{3} < -g(x)$

donc $a - \dfrac{a-b}{3} - b - \dfrac{a-b}{3} < f(x) - g(x)$
et par conséquent $\dfrac{a-b}{3} < f(x) - g(x)$
donc, comme $a > b$, on obtient $O < f(x) - g(x)$, donc $g(x) < f(x)$.
Donc $\boxed{\text{si pour tout } x \in]\alpha; +\infty[, f(x) \leq g(x), \text{ alors : } a \leqslant b.}$

Théorème des gendarmes

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit f, g et h trois fonctions définies sur des ensembles contenant un l'intervalle $]\alpha; +\infty[$.
Si pour tout x appartenant à $]\alpha; +\infty[$:

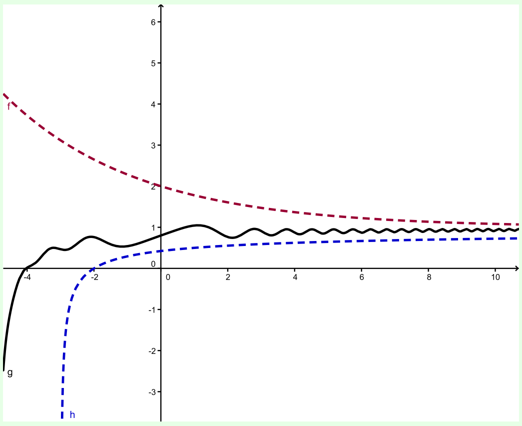
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = a$$

Alors

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = a$$



Exemple

Démonstration

En effet, Soit I un intervalle ouvert I contenant a.
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = a$, donc I contient $f(x)$ et $g(x)$ pour x assez grand,
or $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
donc I contient aussi $g(x)$.
Donc tout intervalle ouvert contenant a contient $g(x)$ pour x assez grand et par conséquent $\lim_{x \to +\infty} g(x) = a$.

1 Croissance comparée

Propriétés

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
2. Pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
3. Pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x \times x^n = 0$

Démonstration

1. Par définition, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :
   $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \mathrm{e}^x$
   Par conséquent elle est dérivable en 0, d'où :
   $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{0+h} - \mathrm{e}^0}{h}\right) = \mathrm{e}^0$$
   où encore :
   $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{h} - 1}{h}\right) = 1$$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - x$.
   g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   or exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^0 = 1$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ et par conséquent g'' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
   g' est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, or $g'(0) = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) \geqslant 0$.
   g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$, or $g(0) = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geqslant 0$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
   $\mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$, d'où $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$ et par conséquent $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$
   or $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right) = +\infty$ Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty}$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{ny}}{(ny)^n} &= \frac{1}{n^n} \times \frac{\mathrm{e}^{ny}}{(y)^n}\\ &= \frac{1}{n^n} \times \frac{(\mathrm{e}^{y})^n}{y^n}\\ &= \frac{1}{n^n}\left(\frac{\mathrm{e}^{y}}{y}\right)^n\end{aligned}$$
   or, d'après la propriété précédente, $\lim\limits_{y\to +\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^y}{y}\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{y\to +\infty}\left(\dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{\mathrm{e}^y}{y}\right)^n\right) = +\infty$
   et par conséquent :
   $$\lim_{y\to +\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{ny}}{(ny)^n}\right) = +\infty$$
   donc, avec $y = nx$, on obtient :
   $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x^n}\right) = +\infty$$

3. soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^x \times x^n\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} \times (-x)^n\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left((-1)^n \times \frac{x^n}{\mathrm{e}^x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left((-1)^n \times \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}\right)}\right) \\
&= 0 && \text{car } \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}\right) = +\infty
\end{aligned}$$