Continuité, dérivation et convexité

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$\left\{\begin{array}{ll} f:\mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto x^4+x^3+x^2+x-1 \end{array}\right.$$

Démontrer que f admet une unique racine positive.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ll} f:\mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto 3-\dfrac{x+1}{e^x} \end{array}$$

1. étude de f.
   (a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?
   (b) Etudiez les variations de f et faire son tableau de variation.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-x$.
   Démontrer qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x)=x$.
   On notera α cette solution.
3. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n) \end{array}\right.$$

   (a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$$

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+(-4x^2-10x+8)e^{-0,5x}$

1. Etudiez les variations de f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-4; -2]$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. f est-elle dérivable en 2.

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$:

1. Déterminer f',
2. Déterminer $f''(x)$.
3. On note $f^{(3)}$ la dérivée troisième de f, c'est à dire la dérivée de la dérivée seconde. Déterminer $f^{(3)}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{3}{2}x - 10\right)^2$:

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer f',
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les abscisses des points de $\mathcal{C}$ où les tangentes sont horizontales.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$
$sqrtx^2 - x + 1$:

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que f' est bien définie sur $\mathbb{R}$,
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$
4. Démontrer que (u_n) est décroissante et positive.
5. Que peut-on en déduire ?

6. En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$