Continuité, dérivabilité et convexité

I Continuité

1 Définitions et propriétés

Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un ensemble E et a un élément de E.

- On dit que la fonction f est continue en a si f a une limité en a et $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que la fonction f est continue sur E si f est continue en a pour tout élément a de E.

Propriétés

- Les fonctions de référence (polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carré, inverse ...) sont continue sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit et le quotient de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant $a \in I$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$$

Démonstration 1. On utilise les définitions de la limite de f en a et celle de la limite de (u_n) en $+\infty$.
soit $\epsilon > 0$
f étant continue sur I et a étant un élément de I, on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \alpha; a + \alpha[$, $f(x) \in]f(a) - \epsilon; f(a) + \epsilon[$ D'autre part, $\lim_{n \to a} u_n = a$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$ on ait $u_n \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap I$
Donc pour $n \geqslant N_0$, $f(u_n) \in]f(a) - \epsilon; f(a) + \epsilon[$ et par conséquent : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)}$

Théorème du point fixe
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui même et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in I$, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$

Démonstration 2. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui même et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que (u_n) converge vers une limite $l \in I$.
On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$
d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(l)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ et par conséquent $\boxed{l = f(l)}$

Exemples

- Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- Soient f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto 4 - \frac{1}{x}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$
Pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$
Autrement dit, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent dans $[a; b]$.
On écrit :

$$\forall k \in f\big([a; b]\big), \exists c \in [a; b] \text{ tel que } f(c) = k$$

Démonstration 3. on démontre ce théorème dans le cas où f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ telle que $f(a) \leqslant f(b)$.
Soit $k \in [f(a);f(b)]$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a_{n+1} = a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$ et $\begin{cases} b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k \\ b_{n+1} = b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

- **Initialisation**
  On a deux cas :
  * Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_1 = a_0 = a$ et $b_1 = \dfrac{a+b}{2}$
    or $a \leqslant b$ donc $\dfrac{a+a}{2} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \dfrac{b+b}{2}$ d'où $a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$
    par conséquent, on a bien $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$
  * Sinon, on a $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < k$, d'où $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $b_1 = b_0 = b$.
    or $a \leqslant b$ donc $\dfrac{a+a}{2} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \dfrac{b+b}{2}$ d'où $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1$
    par conséquent, on a bien $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$
- **Hérédité**
  soit $n \in \mathbb{N}$
  Supposons que la proposition soit vraie pour l'entier n. c'est à dire que $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.
  La encore on a deux cas :
  * Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$
    or $a_n \leqslant b_n$ donc $\dfrac{a_n+a_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant \dfrac{b_n+b_n}{2}$ d'où $a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
    par conséquent, on a bien $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
  * Sinon, on a $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, d'où $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
    or $a_n \leqslant b_n$ donc $\dfrac{a_n+a_n}{2} \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant \dfrac{b_n+b_n}{2}$ d'où $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$
    par conséquent, on a bien $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$
- **Conclusion**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$

La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b, et par conséquent elle converge vers un réel $l_a \in [a;b]$.
De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a et par conséquent elle converge vers un réel $l_b \in [a;b]$.

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$
Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$v_{n+1} = \dfrac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2}$

La encore on a deux cas :

- Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$

  d'où $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{a_n+b_n}{2}-a_n}{2}=\dfrac{\dfrac{a_n+b_n}{2}-\dfrac{2a_n}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{b_n-a_n}{2}}{2}=\dfrac{v_n}{2}$
- Sinon, on a $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, d'où $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$.

  d'où $v_{n+1}=\dfrac{b_n-\dfrac{a_n+b_n}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{2b_n}{2}-\dfrac{a_n+b_n}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{b_n-a_n}{2}}{2}=\dfrac{v_n}{2}$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\dfrac{v_n}{2}$ et par conséquent la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}\in]0;1[$, donc elle converge vers 0.
or (a_n) et (b_n) étant convergentes, on a :
$\dfrac{l_b-l_a}{2}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n-\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n-a_n}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$
Donc $\dfrac{l_b-l_a}{2}=0$ et par conséquent $l_b=l_a$.
Notons l cette limite commune.

La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ et (a_n) étant une suite d'éléments de $[a;b]$ convergent vers l, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(l)\leqslant k$ par définition de (a_n)
De même, la fonction f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ et (b_n) étant une suite d'éléments de $[a;b]$ convergent vers l, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=f(l)\geqslant k$ par définition de (b_n)
Donc $f(l)\leqslant k$ et $f(l)\geqslant k$ et par conséquent $\boxed{f(l)=k}$.
D'où la conclusion.

Propriété Corollaire du théorème des valeurs intermédiaire ou théorème de la bijection

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors tout réel $k\in f([a;b])$ a un unique antécédent par f dans $[a;b]$.
C'est à dire que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a;b]$.

Démonstration 4. Soient f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et $k\in[f(a);f(b)]$ un réel.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, k a au moins un antécédent dans $[a;b]$.
Démontrons alors par l'absurde que cet antécédent est unique.
Supposons donc qu'il existe deux réels distincts c_1 et c_2 dans $[a;b]$ tels que $f(c_1)=k$ et $f(c_2)=k$.
Sans nuire au raisonnement, on peut supposer que $c_1<c_2$.
f étant strictement monotone sur $[a;b]$, on a deux cas :

- Supposons que f est strictement croissante sur $[a;b]$.
  Dans ce cas, on a $f(c_1)<f(c_2)$ et par conséquent $k<k$, ce qui est absurde.
- Supposons que f est strictement décroissante sur $[a;b]$.
  Dans ce cas, on a $f(c_1)>f(c_2)$ et par conséquent $k>k$, ce qui est aussi absurde.

$\boxed{\text{Donc il n'existe qu'un unique antécédent de } k \text{ par } f \text{ dans } [a;b]}$

II Dérivabilité

1 Rappel

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et a un élément de $\mathcal{I}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, L est appelé nombre dérivé de f en a et on l'écrit $f'(a)$. d'où, si f est dérivable en a, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

dans ce cas, on a aussi :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en a pour tout $a\in I$

2 propriétés

Propriété

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur cet intervalle.

Démonstration 5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I.
Soit $l\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$.
Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times h\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\lim_{h\to 0}h\\ &= l\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ et par conséquent $\boxed{f \text{ est continue en } a}$.

Danger

La réciproque de cette propriété est fausse, en effet la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0.

Propriété Dérivée d'une fonction composée

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J.
Dans ce cas, la fonction h définie sur I par $h(x)=(g\circ f)(x)$ est dérivable sur I et on a pour

tout réel x :

$$h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$$

Démonstration 6. Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J et g une fonction définie et dérivable sur J.
Soit $a \in I$.
Montrons que $h = g \circ f$ est dérivable en a.
Soit $x \in I \setminus \{a\}$
On a alors :

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{(g \circ f)(x)-(g \circ f)(a)}{x-a} = \frac{(g \circ f)(x)-(g \circ f)(a)}{f(x)-f(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- D'une part, en posant $t = f(x)$ et $b = f(a)$ on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ car f étant dérivable sur I, elle est continue sur I.
  De plus, g est dérivable sur J et b est un élément de J, donc on a :
  $$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x)-(g \circ f)(a)}{f(x)-f(a)} = \lim_{t \to b} \frac{g(t)-g(b)}{t-b} = g'(b) = (g' \circ f)(a)$$
- D'autre part, f étant dérivable en a, on a :
  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Donc $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$ a une limite réelle en a et :

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = (g' \circ f)(a) \times f'(a)$$

$h = g \circ f$ est dérivable sur I et on a $\boxed{h'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)}$

Exemple

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que sa dérivée f' est aussi dérivable sur I.
On dit alors que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f'.
f'' est appelée **dérivée seconde de** f.

Exemple

III Convexité

Définition