Produit scalaire

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On note les points $A\left(-5;1\right)$, $B\left(-3;-5\right)$ et $C\left(-2;2\right)$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 2

ABCD est un carré de coté 6 cm. les points I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[BC]$.
On veut démontrer que (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.
On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

1. faire une figure.
2. justifier que $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé.
3. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, I et J.
4. démontrer que les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On note les points $E\left(1;-2\right)$, $F\left(3;1\right)$ et $G\left(-1;3\right)$.
Le triangle EFG est-il rectangle ?

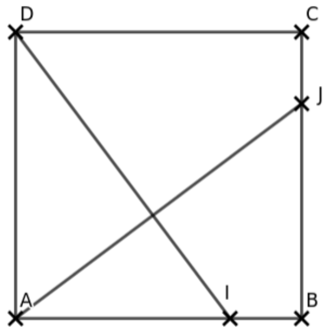
Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit $A(1;4)$, $B(-5;4)$ et $C(2;2)$.

1. Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. En déduire une valeur approchée en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$

Exercice 5

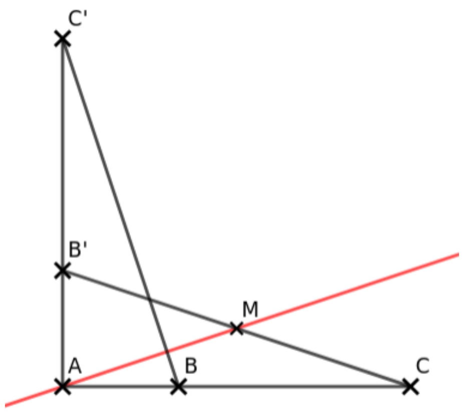
ABCD est un carré de coté a.
Soit I un point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et J un point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.



1. En utilisant la relation de Chasles, démontrer que :
$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA}$$
2. En déduire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}$
3. Que peut-on en déduire pour les droites (AJ) et (DI) ?

Exercice 6

Soit ABB' un triangle rectangle en A tel que $AB = AB' = 1$.
Soit C et C' deux points respectifs des deux demi-droites $[AB)$ et $[AB')$ et tels que $AC = AC' = 3$
Soit M le milieu de $[B'C]$.
On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}\right)$.



1. justifier que $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}\right)$ est un repère orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées des points de la figure.
3. Démontrer que (AM) et (BC') sont perpendiculaires.

Exercice 7

ABC est un triangle rectangle en A.
I est le milieu de $[BC]$, H le pied de la hauteur issue de A.
P est le projeté orthogonal de H sur (AB) et Q celui de H sur (AC).

1. Justifier que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$
2. Justifier que $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que (AI) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 8

ABC est un triangle tel que $AC = 3cm$, $AB = 5cm$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2\pi}{3}$
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. faire une figure.
2. En utilisant la trigonométrie usuelle, calculer les longueurs HC, HA, HB et BC.

3. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$
4. Démontrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = ||\overrightarrow{CH}||^2 + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$.
5. En déduire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Exercice 9

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que :

$$||\overrightarrow{u}|| = 5 \quad ||\overrightarrow{v}|| = 4 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 10\sqrt{3}$$

Calculer

1. $(-\overrightarrow{u}).(-\overrightarrow{v})$
2. $(-\overrightarrow{u}).(\overrightarrow{v})$
3. $\overrightarrow{v}^2$
4. $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$
5. $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2$

Exercice 10

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs

1. Démontrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2)$
2. Démontrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2)$
3. Démontrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{u}||^2 - \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2)$

Exercice 11

Soit A et B deux points du plan et I le milieu de $[AB]$
Démontrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Exercice 12

L'équivalence
Soit A et B deux points tels que $AB = 6$. Soit I le milieu de $[AB]$ et M un point distinct de I.
On considère les deux affirmations suivantes :

- **Affirmation 1 :** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 18$
- **Affirmation 2 :** Le triangle AIM est rectangle en I.

L'objectif est de démontrer l'équivalence de ses deux affirmations.

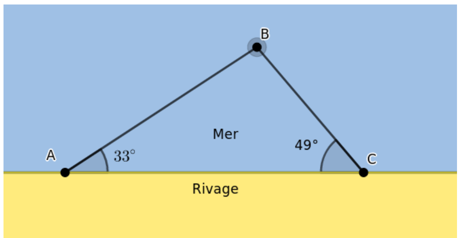
- Soit M un point du plan tel $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 18$.
  1. Vérifier que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

2. Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$
3. En déduire que AIM est rectangle en I.

- On suppose que le triangle AIB est rectangle en I.
  1. Quel est le projeté orthogonal du point M sur (AB) ?
  2. En déduire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 18$
- En déduire que les affirmations 1 et 2 sont équivalentes.

Exercice 13

Deux maitres-nageurs sauveteurs postés sur la plage observe un jet-ski naviguant à vive allure. Ils souhaitent savoir si le jet ski se situe bien en dehors de la zone de baignade, c'est à dire au delà des 300 mètres du rivage.
Il ont effectués les relevés suivants où les points A et C représente les positions des maîtres-nageurs qui sont éloignés de 700 mètres et le point B celle du jet-ski.
Le jet-ski est-il en infraction ?



Exercice 14

ABCD est un carré de coté 4. I est un point tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et J un point tel que $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

1. Calculer $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DJ}$
2. En déduire une mesure en degrés de l'angle $\widehat{IDJ}$

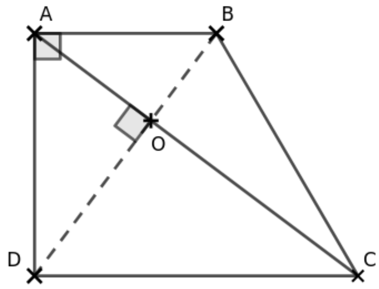
Exercice 15

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants.

1. ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 3$ et $BC = 2$.
2. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
3. ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé dans lequel les points A, B et C ont pour coordonnées sont : $A(1;2)$, $B(-2;3)$ et $C(-1;-1)$

Exercice 16

ABCD est un trapèze de base $[AB]$ et $[DC]$, qui est rectangle en A et dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires et se coupent en O.
On a aussi $AB = 3$ et $AD = 4$



1. En calculant $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ de deux manières différentes, montrer que $OB = \dfrac{9}{5}$
2. Déterminer OD
3. Calculer en utilisant le théorème de Thalès la longueur CD puis déterminer AC
4. Déterminer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} \ , \ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} \ , \ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OD} \ , \ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$$

Exercice 17

le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère trois points $A(1;3)$, $B(-2;1)$ et $C(1;10)$ du plan. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On souhaite calculer la hauteur CH du triangle ABC.

1. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit D le point tel que $\overrightarrow{HD} = \vec{n}$
   (a) Calculer $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$
   (b) Justifier que $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AC}$
   (c) En déduire la longueur HC

Exercice 18

On considère les points $A(\ 6\ ;\ -1\ )$, $B(\ 1\ ;\ 4\ )$ et $C(\ -3\ ;\ -4\ )$ dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur le coté $[BC]$.

1. Calculer la longueur CB
2. Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$
3. En déduire la longueur CH.
4. Soit $M(x;y)$ un point du plan.
   (a) Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BM}$ en fonction de x et y.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BM} = 0$ si et seulement si $y = -3x + 7$.
   (c) Déterminer que l'équation réduite de la droite (AC)

(d) Déduire des questions précédentes les coordonnées du projeté orthogonal M de B sur (AC)