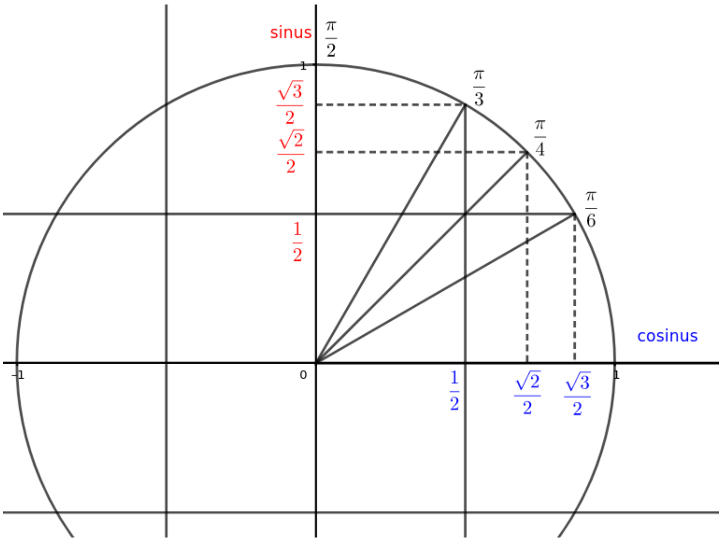
Produit scalaire

1 Angle en radian



2 Le produit scalaire dans le plan

Définition

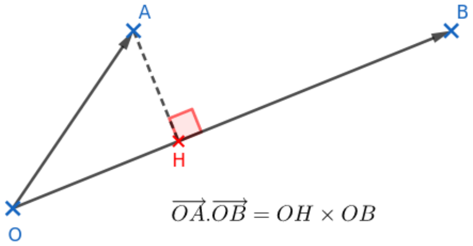
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul du plan.
Soit O un point du plan et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (OB)
Le produit scalaire de ces deux vecteurs, noté $\vec{u}.\vec{v}$ est le **réel** défini par :

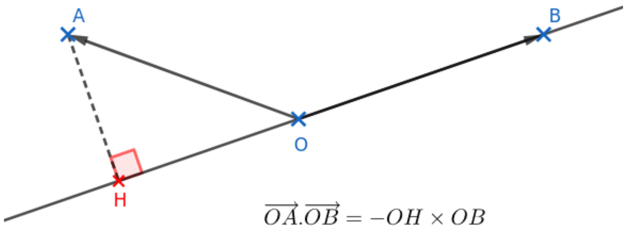
- $\vec{u}.\vec{v} = OH \times OB$ si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont dans le même sens.
- $\vec{u}.\vec{v} = -OH \times OB$ si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas dans le même sens.

D'autre part, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan :

$$\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{u} = 0$$

Interprétation graphique :



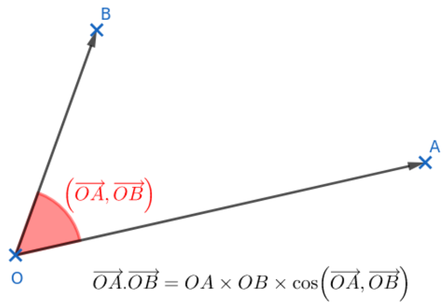


Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul du plan. Le produit scalaire de ces deux vecteurs, noté

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le réel défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$



Démonstration

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nul du plan.
Soit O un point du plan et A et B deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (OB)

- Si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont dans le même sens, alors, dans le triangle rectangle OAH, on a :

$$cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = cos\left(\widehat{AOH}\right) = \frac{OH}{OA}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= OH \times OB \\ &= OA \times cos\left(\widehat{AOH}\right) \times OB \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\end{aligned}$$

- Si $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas dans le même sens, alors, dans le triangle rectangle OAH, on a :

$$\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \pi$$

donc,

$$\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$$

d'où

$$\cos\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA}\right) = \cos\left(\pi - \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right) = -\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$$

Et, par conséquent, avec $cos\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OA}\right) = cos\left(\widehat{AOH}\right) = \frac{OH}{OA}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= -OH \times OB \\ &= -OA \times cos\left(\widehat{AOH}\right) \times OB \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\end{aligned}$$

Remarque

Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$, donc $\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$
L'angle orienté ou non ne change donc rien pour le produit scalaire et par conséquent :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OB}|| \times \cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

Propriété (Admise)

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère **orthonormé** Soient $\overrightarrow{u}\,(x, y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x', y')$ deux vecteurs du plan.
On a alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Exemple

Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel.
On a alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
3. $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k\,(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

Démonstration

Propriétés

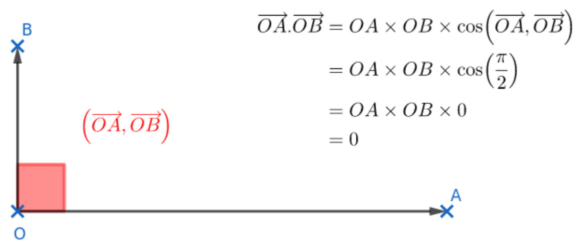
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On a alors :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$

Démonstration

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$



Exemple

3 Al-Kashi

Théorème - Al-Kashi

Soit ABC un triangle.
Soit a, b, et c les longueurs respectives des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On a alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\left(\widehat{A}\right)$$

Exemple

Démonstration