Matrices

Exercice 1

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Quel est la taille des matrices A et B ?
2. Effectuer les opérations suivantes.
3. $A + B$
4. $A - B$
5. $2A$
6. $-A + 2B$

Exercice 2

On considère les matrices suivantes.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Effectuer les opérations suivantes.

1. $C + 8D$
2. $3C - 4D$

Exercice 3

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0,5 & 2 \\ -4 & -0,8 \end{pmatrix}$$

1. Soit x un nombre réel. Calculer xA.
2. Soit t un nombre réel. Calculer $tA + (1 - t)B$

Exercice 4

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } L = (1 \; -1)$$

Effectuer les opérations suivantes. $A+B$; $B-A$; AB; BA; AC; LB; $AC+BC$ et A^2

Exercice 5

On considère les matrices suivantes. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA.
2. Que peut-on en conclure sur le produit de deux matrices ?
3. Calculer $(A+B)(A-B)$.

Exercice 6

On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et A^4. On pourra utiliser la calculatrice ou un logiciel.
2. Que peut-on dire de A^n ?

Exercice 7

ALGO PYTHON On a écrit dans l'éditeur les instructions suivantes.

```
from numpy import *
a=array([[2,1],
          [4,2]])
b=array([[1,-1],
          [0,5]])
```

1. A quoi sert l'instruction array$([[2,1],[1,-3]])$?
2. Qu'obtient-on quand on écrit dans la console l'instruction $a+b$?
3. En utilisant la console, calculer $a-b$, puis $2a-3b$.

Exercice 8

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Écrire l'instruction Python dans l'éditeur qui permet de définir la matrice A.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. Conjecturer une expression de A^n pour tout entier naturel n et démontrer cette expression.

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. Faire une conjecture sur l'expression de A^n.
3. Valider cette conjecture par récurrence.

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une matrice N carré d'ordre 3 telle que : $A = I + N$.
2. Montrer que $N^3 = 0$.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$$

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = A^2$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a :

$$A^n = A^2$$

Exercice 12

Lors d'un examen, les élèves ont passé cinq matières différentes :
- mathématiques, coefficient 6 ;
- francais, coefficient 6 ;
- anglais, coefficient 3 ;
- sciences, coefficient 3 ;
- EPS, coefficient 2.

On a consigné dans le tableau ci-dessous, les notes obtenues par cinq étudiants.

Laima	17	14	13	12	18
Jérémy	12	11	14	09	13
Justine	11	13	07	12	14
Liu	18	13	17	14	15
Estelle	6	16	17	9	12

1. Ecrire la matrice A des notes des cinq élèves.
2. Ecrire la matrice colonne C des coefficients de chaque matière.
   (a) Calculer la matrice $\frac{1}{20}A \times C$.
   (b) Interpréter les éléments de C dans le contexte de l'exercice.

Exercice 13

Recopier et compléter le produit matriciel ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & ? \\ ? & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -23 \\ 11 & -9 \end{pmatrix}$$

Exercice 14

On donne les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Calculer AB
2. Calculer BA.
3. Vérifier le résultat avec la calculatrice.

Exercice 15

On considère la fonction Python ci-dessous.

```python
from numpy import *
from numpy.linalg import *
def produit(x,y,z) :
    a=array([[3,5,-1],
             [4,2,1],
             [-3,-1,7]])
    b=array([[x],
             [y],
             [z]])
    return dot(a,b)
```

1. Que renvoie cette fonction si on entre en arguments 2, 1 et 4 ?
2. Que fait cette fonction ?
3. Modifier le programme de la fonction pour qu'elle renvoie le produit de la matrice ligne

(x,y,z) par la matrice A avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 16

On considère les matrices A et B définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B sont inverse l'une de l'autre.

Exercice 17

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^3 - 3A^2 + 5A - 3I = \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est la matrice nulle de taille 3×3.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 18

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut savoir si A est inversible et le cas échéant, déterminer son inverse.

1. Supposons que A est inversible. Il existe donc dans ce cas une matrice B de taille 2×2 telle que $B = A^{-1}$ On pose :

   $$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

   Calculer $A \times B$ et en déduire A^{-1} si A est inversible.
2. En déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse.

Exercice 19

Soient A et B deux matrices inversibles.
Montrer que AB est inversible et donner son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1}

Exercice 20

Soient A et B les matrices définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A et B sont inversible et calculer A^{-1} et B^{-1}
2. Calculer l'inverse de AB
3. Calculer $A^{-1}B^{-1}$ et en déduire que $A^{-1}B^{-1} \neq (AB)^{-1}$

Exercice 21

On considère le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 15 \\ -x + 4y & = & 2 \end{array} \right.$$

1. Déterminer les matrices A, X et B telles que le système $(\mathcal{S})$ soit équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Justifier $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$
4. En déduire les solutions du système.

Exercice 22

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_3$
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 23

Dans un jardin public, un artiste doit installer une oeuvre aquatique commandée par la mairie.
Cette oeuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.
Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.
Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer P^2. En déduire que la matrice P est inversible et préciser sa matrice inverse.
   (b) Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
   (c) Calculer PDP.
   (d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.

On admet par la suite que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.
2. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.
   (a) Montrer que tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.
   (b) On admet que, pour tout entier naturel non nul n, $V_n = M^n V_0$.
   Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.
3. (a) Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.
   (b) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   (c) On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.

Exercice 24

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.
   (b) On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
   Déterminer la matrice P^{-1}.
   Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
   $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Pour tout entier naturel n, on admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

   (d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0,9^n$.
3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10$^{\text{e}}$ jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.
4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.