# Matrice

## I Notion de matrices

**Définition**

Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels non nuls.
Une matrice est un tableau de nombres à $m$ lignes et $n$ colonnes.
Sa taille (ou sa dimension) est $m \times n$.
Une matrice $A$ de taille $m \times n$ peut s'écrire comme ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & \dots & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Les nombres $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ sont appelés coefficients de la matrice $A$.
On écrit :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

Le coefficient $a_{i,j}$ est le nombre placé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne.

**Exemple**

- La matrice $A$ ci-dessous est de taille $4 \times 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

En posant $A = \left((a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}\right)$, on a $a_{2,3} = -2$

# II Opérations sur les matrices

## 1 Somme

**Définition**

On appelle matrice nulle d'ordre $m \times n$ est la matrice d'ordre $m \times n$ dont tous les coefficients sont nuls.

**Définition**

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$. Leur somme $A + B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times n$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

**Exemple**

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -3 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

## 2 Multiplication par un réel

**Définition**

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice et $\lambda$ un réel.
La matrice $\lambda A$ est la matrice $B = (b_{ij})$ de même taille que celle de $A$ définie par $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

**Exemple**

$$5 \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

**Propriété**

Deux matrices sont égales si tous leurs coefficients sont égaux.

**Propriétés**

Soient $A$ et $B$ deux matrices de même taille.
Pour tout $\alpha$ et $\beta$ réels, on a :

1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

## 3 Produit de deux matrices

**Définition**

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de taille respective $m \times n$ et $n \times p$. Leur produit $A \times B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times p$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

**Exemple**

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

**Danger**

Attention, contrairement au produit de deux réels, le produit de deux matrices n'est pas commutatif.
C'est à dire qu'il existe des matrices $A$ et $B$ telles que $A \times B \neq B \times A$.
Dans l'exemple ci dessus, le produit n'a pas de sens si l'on commute les deux matrices.

**Exemple**

# III Inverse d'une matrice

## 1 Matrices inversibles

### Remarque
Dans l'ensemble des réels, 1 est l'unique nombre tel que pour tout réel $a$, $a \times 1 = 1 \times a = a$. On l'appelle l'élément neutre pour la multiplication.
De plus, un nombre $x$ est inversible s'il existe un réel $y$ tel que $xy = 1$.
Dans ce cas, $y$ est appelé inverse de $x$ et on le note $x^{-1}$

Pour les matrices, la matrice $I_n$ est aussi l'élément neutre pour la multiplication qui n'est pas commutative, contrairement à la multiplication dans $\mathbb{R}$.
On définit donc les matrices inverses comme suit.

### Définition
Soit $A$ une matrice carré d'ordre $n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que $A$ est inversible s'il existe une matrice carré $B$ d'ordre $n$, , telle que :

$$A \times B = I_n \qquad \text{et} \qquad B \times A = I_n$$

Dans ce cas, la matrice $B$ est unique.
On note $A^{-1}$ quand elle existe la matrice inverse de la matrice $A$.

### Exemple

### Propriété (Admise)
Soit $A$ une matrice carré d'ordre $n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- S'il existe une matrice $B$ d'ordre $n$ telle que $A \times B = I_n$, alors $A$ est inversible et $A^{-1} = B$
- S'il existe une matrice $B$ d'ordre $n$ telle que $B \times A = I_n$, alors $A$ est inversible et $A^{-1} = B$

## 2 Exemple de détermination de matrice inverse

On veut inverser la matrice $A$ suivante :

### Exemple

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**Correction**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} -L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,6 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/5 \\ L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,8 & -0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 + 2L_3 \\ L_2 - 0,6 \times L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1,4 & 1,2 & -0,8 \\ 0 & 1 & 0 & 0,8 & -0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

La matrice $A$ est donc inversible et a pour matrice inverse la matrice :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1,4 & 1,2 & -0,8 \\ 0,8 & -0,4 & 0,6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 3 Application aux systèmes linéaires